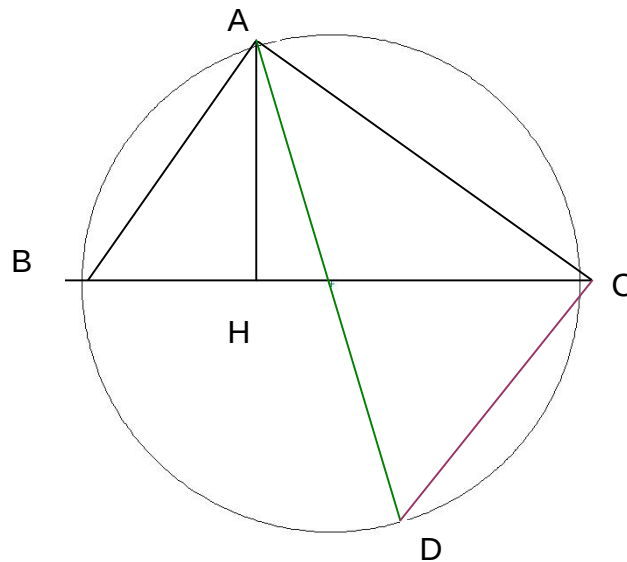


TRIGONOMETRIE : angles et cercles

Enoncés et démonstrations

5) Dans un triangle ABC, H est le pied de la hauteur issue de A et [AD] est le diamètre du cercle circonscrit. Démontrer que $AB.AC=AH.AD$



Outils : angles inscrits et triangles semblables

Démonstration :

Le triangle AHB est rectangle en H ($\hat{H} = 90^\circ$) et $\hat{B}$ intercepte l'arc AC (1)

Le triangle ACD est rectangle en C ($\hat{C} = 90^\circ$) car inscrit dans un demi-cercle et $\hat{D}$ intercepte l'arc AC (2)

D'où vu (1) et (2), on a $\hat{B} = \hat{D}$

Les triangles AHB et ACD ont donc deux angles de même amplitude d'où les triangles AHB et ACD sont semblables.

$$\text{D'où } \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD} \text{ ou } AH.AD=AB.AC$$

6) Soit un cercle C de centre O et de corde [AB]. On prolonge cette corde du côté de B d'un segment [BC] dont la longueur est celle du rayon du cercle. On trace le diamètre COE (E étant le point du cercle le plus éloigné de C). Démontrer que l'angle AOE vaut le triple de l'angle ACE

Outils : angles extérieurs au triangle et triangles isocèles

Démonstration :

Le triangle AOB est isocèle (car deux côtés sont des rayons) d'où $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ (1)

Le triangle OBC est isocèle (vu construction : $OB=BC=\text{rayon}$) d'où $\hat{O}_1 = \hat{C}$ (2)

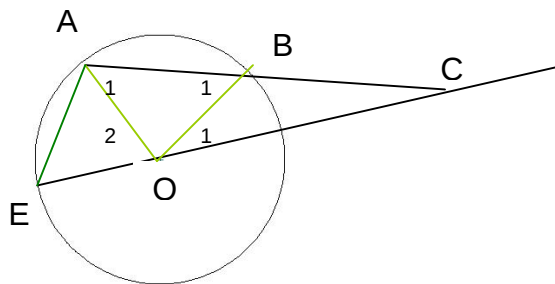
L'angle $\hat{B}_1$ est extérieur au triangle OBC d'où $\hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{O}_1$

$$\text{d'où } \hat{B}_1 = \hat{C} + \hat{C} (\text{vu}(2)) = 2\hat{C} \quad (3)$$

L'angle AOE ($\hat{O}_2$) est extérieur au triangle AOC d'où $\hat{O}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}$

$$\text{d'où } \hat{O}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C} \quad (\text{vu } (1))$$

$$\text{d'où } \hat{O}_2 = 2\hat{C} + \hat{C} (\text{vu}(3)) = 3\hat{C}$$



N° 4 p 188 (savoir et savoir-faire 4^{ème} niveau A)

H et O désignent respectivement l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Démontrer que l'angle BAH = l'angle CAO

Outils : orthocentre = intersection des hauteurs ; angles inscrits et angles au centre

Démonstration :

Soit E : pied de la hauteur issue de A

L'angle inscrit $\hat{B}$ intercepte l'arc AC

L'angle au centre $\hat{O}$ intercepte l'arc AC

$$\text{d'où } \hat{O} = 2\hat{B} \quad (1)$$

Le triangle AOC est isocèle d'où la hauteur [OD] relative à [AC] est aussi bissectrice de l'angle AOC d'où l'angle AOD = $\frac{1}{2} \hat{O}$ (2)

Le triangle AOD est rectangle en D ($\hat{D} = 90^\circ$) et l'angle AOD = $\frac{1}{2} \hat{O}$ (vu(2))

Le triangle AEB est rectangle en E ($\hat{E} = 90^\circ$) et l'angle ABE = $\hat{B} = \frac{1}{2} \hat{O}$ (vu (1))

Les triangles AOD et AEB ont donc deux angles de même amplitude et donc la même amplitude pour le troisième angle :

d'où angle OAD = angle BAE

ou angle OAC = angle BAH (voir dessin)

