Les coniques

A) Première définition d'une conique

Une conique est la courbe obtenue par l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan

B) Coniques déterminées par un foyer et une directrice.

Une conique est le lieu géométrique des points dont les distances à un point fixe (Foyer F) et à une droite fixe ne comprenant pas ce point (directrice d) ont un rapport constant non nul.

$$P \in \Gamma \text{ ssi } |PF| = |Pd| \cdot e$$

rem : e = excentricité (>0)

C) Classement des coniques par leur excentricité e

e < 1 : ellipses

e = 1 : paraboles

e > 1 : hyperboles

D) Equation cartésienne générale d'une conique

$$C \equiv (x + k)^2 + y^2 = e^2 (x + (k + p))^2$$

avec F(k,0) et d $\equiv x = k + p$ (p ≠ 0)

E) Equations cartésiennes réduites

a) **La parabole** : On appelle *parabole*, le lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe et d'une droite fixe.

$$P(x,y) \in P \text{ ssi } y^2 = 2px$$

$$F(c,0) \quad d \equiv x = -p/2$$

b) **L'ellipse** : On appelle *ellipse*, le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante

$$P(x,y) \in E \text{ ssi } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a^2 - b^2 = c^2$$

$$F(c,0) \quad F'(-c,0)$$

c) **L'hyperbole** : On appelle *hyperbole*, le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes ont une différence constante en valeur absolue

$$P(x,y) \in H \text{ ssi } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a^2 + b^2 = c^2$$

$$F(c,0) \quad F'(-c,0)$$

$$\text{rem A.O.} \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ou } y = \pm \frac{b}{a} x$$

Propriété : $e = \frac{c}{a}$

F) Equations des tangentes à une parabole :

a) Equation de la tangente en un point d'une parabole

$$t_{(x_0, y_0)} \equiv y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

$$t_{(x_0, y_0)} \equiv yy_0 = p(x + x_0)$$

b) Equation de la tangente à une parabole de direction "a"

$$t \equiv y = ax + \frac{p}{2a}$$

c) Equation des tangentes à une parabole issues d'un point extérieur M (voir méthodes en exercices)

G) Equations des tangentes à une ellipse :

a) Equation de la tangente en un point de l'ellipse

$$t_{(x_0, y_0)} \equiv \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad t_{(x_0, y_0)} \equiv y - y_0 = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

b) Equation de la tangente à une ellipse de direction "m"

$$t \equiv y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

H) Equations des tangentes à une hyperbole :

a) Equation de la tangente en un point de l'hyperbole

$$t_{(x_0, y_0)} \equiv \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad t_{(x_0, y_0)} \equiv y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

b) Equation de la tangente à une hyperbole de direction "m"

$$t \equiv y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2} \quad m \leq \frac{-b}{a} \quad \text{ou} \quad m \geq \frac{b}{a}$$