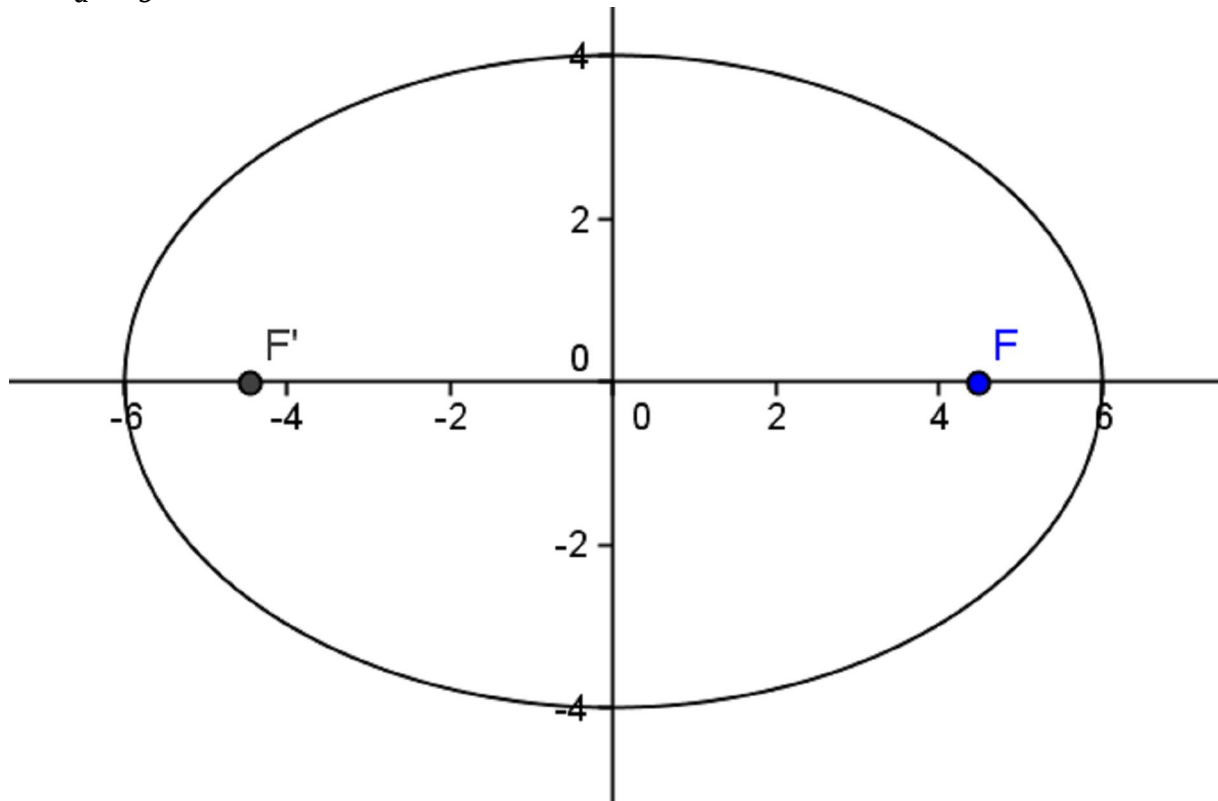


GEOMETRIE : Les coniques

Exercices sur les ellipses

Formules :

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Sommets } (\pm a, 0) (0, \pm b) \quad \text{Foyers } (\pm c, 0) \text{ avec } c^2 = a^2 - b^2$$



Tangente en un point (x_0, y_0) de l'ellipse :

$$t_{(x_0, y_0)} \equiv y - y_0 = \frac{-b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \quad \text{ou} \quad t_{(x_0, y_0)} \equiv \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

Tangente à l'ellipse de direction donnée:

$$t \equiv y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

Exercices récapitulatifs

- 1) Rechercher l'équation de l'ellipse sachant que l'axe focal mesure 12 cm et la distance entre les foyers est 8 cm.
- 2) Montrer que la conique $C \equiv 4x^2 + 9y^2 - 12x - 6y - 26 = 0$ est une ellipse. Donner les coordonnées des foyers
- 3) Quelle est l'équation de l'ellipse de grand axe 26 et de petit axe 10. Calculer la distance entre les foyers
- 4) Rechercher les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv 16x^2 + 25y^2 = 400$ au point d'abscisse 4 situé dans le premier quadrant. Démontrer que les tangentes se coupent sur l'axe OX

- 5) Une ellipse de grand axe 10 passe par le point (4;-2,4). Calculer la longueur du petit axe et schématiser l'ellipse.
- 6) Rechercher les équations des tangentes issues du point (-4,3) à l'ellipse $E \equiv 9x^2 + 16y^2 = 144$. Déterminer l'angle qu'elles forment.
- 7) Rechercher les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$ formant un angle de 30° avec l'axe des X.
- 8) Rechercher les équations des tangentes à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ parallèles à la droite $d \equiv 4x + 6y - 19 = 0$. Déterminer la distance entre ces tangentes.
- 9) Rechercher les points de contact des tangentes issues du point (5,-1) à l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ et par suite, les équations de ces tangentes.
- 10) Par le point (3,1), on trace une corde de l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Quelle est l'équation de cette corde si ce point en est le milieu ?
- 11) On coupe l'ellipse $E \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ par la droite $d \equiv y = \frac{2}{3}x$. En leur point d'intersection P (premier quadrant), on trace la tangente et la normale coupant OX en Q et R. Calculer la distance entre Q et R.

Solutions

1. $a = 6, c = 4$ d'où $b^2 = 20$ $E \equiv \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

2. $C \equiv (2x - 3)^2 - 9 + (3y - 1)^2 - 1 - 26 = 0$ ou encore $\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y - \frac{1}{3})^2}{\frac{1}{9}} = 36$

ou encore $\frac{(x - \frac{3}{2})^2}{9} + \frac{(y - \frac{1}{3})^2}{4} = 1$ qui est l'équation d'une ellipse si on pose

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2} = x' \\ y - \frac{1}{3} = y' \end{cases} \quad F(\sqrt{5} + \frac{3}{2}, \frac{1}{3}) \quad \text{et} \quad F'(-\sqrt{5} + \frac{3}{2}, \frac{1}{3})$$

3. $E \equiv \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ $FF' = 24$

4. P(4,12/5)

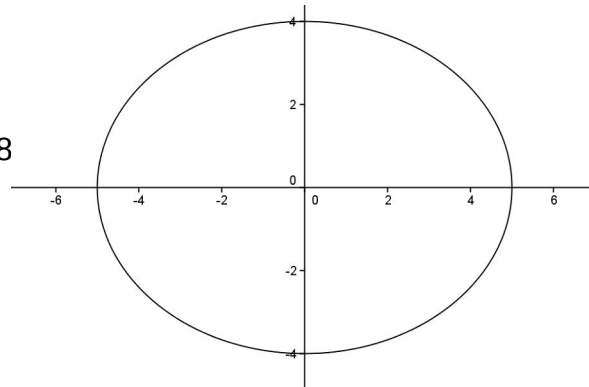
$$t \equiv y - \frac{12}{5} = \frac{-64}{60}(x - 4)$$

$$t \equiv y = \frac{-16}{15}x + \frac{100}{15}$$

5. a = 5

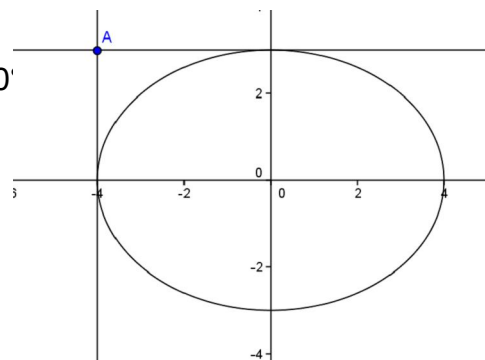
$$\frac{16}{25} + \frac{5.76}{b^2} = 1 \quad \text{d'où longueur du petit axe} = 8$$

$$b^2 = 16$$



6. Vu l'équation de l'ellipse, a = 4 et b = 3

Nous avons donc $t_1 \equiv y = 3$ et $t_2 \equiv x = -4$
les deux tangentes forment un angle de 90°



7. $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad t \equiv y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{\frac{49}{3} + 36}$

8. coef dir de d : -2/3

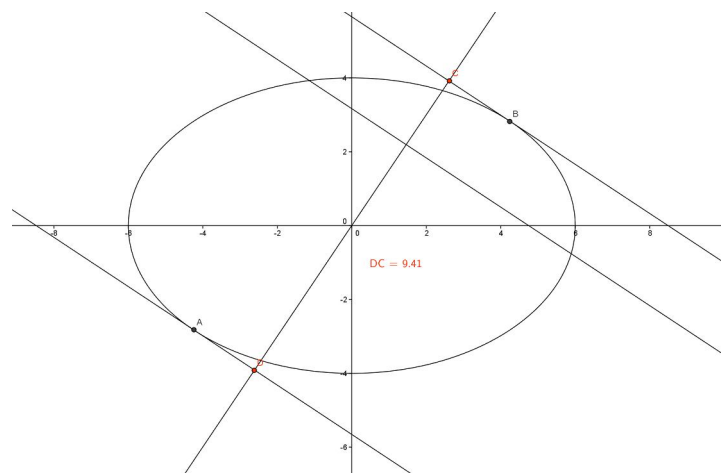
$$t \equiv y = \frac{-2}{3}x \pm 4\sqrt{2}$$

les tangentes sont parallèles donc coplanaires

Considérons une perpendiculaire $d_1 \equiv y = 3/2 x$ et cherchons les points d'intersection de d_1 avec les tangentes

$$A\left(\frac{24\sqrt{2}}{13}, \frac{36\sqrt{2}}{13}\right) \quad B\left(-\frac{24\sqrt{2}}{13}, -\frac{36\sqrt{2}}{13}\right)$$

$$|AB| = \sqrt{88.62} = 9.41$$



9. $(4,5) \notin E$ d'où on résout le système qui donne l'intersection entre l'ellipse et les tangentes à l'ellipse en (x_0, y_0) passant par $(4,5)$

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{25} = 1 \\ \frac{4x_0}{16} + \frac{5y_0}{25} = 1 \end{cases}$$

On obtient les points de contacts $C(0,5)$ et $C'(4,0)$ ainsi que les tangentes $t \equiv y = 5$ et $t' \equiv x = 4$

10. La corde est une segment de droite $d \equiv y = ax + b$

$$(3,1) \in d \Leftrightarrow 1 = 3a + b \quad \text{avec} \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

$$P(x_p, y_p) \in E \Leftrightarrow \frac{x_p^2}{64} + \frac{y_p^2}{36} = 1 \quad (2)$$

$$R(x_r, y_r) \in E \Leftrightarrow \frac{x_r^2}{64} + \frac{y_r^2}{36} = 1 \quad (3)$$

$$(3,1) \text{ est milieu de } [PR] \Leftrightarrow \frac{x_p + x_r}{2} = 3 \text{ et } \frac{y_p + y_r}{2} = 1 \quad (4)$$

$$(2) - (3) : \frac{\frac{x_p^2 - x_r^2}{64} - \frac{y_p^2 - y_r^2}{36}}{\frac{(x_p - x_r) \cdot (x_p + x_r)}{64} - \frac{(y_p - y_r) \cdot (y_p + y_r)}{36}} = 0$$

$$\text{Vu (4), on peut écrire : } \frac{6(x_p - x_r)}{64} + \frac{2(y_p - y_r)}{36} = 0$$

$$\text{Vu (1), on obtient : } \frac{3}{32} + \frac{1}{18}a = 0$$

$$\text{ce qui donnera comme corde } d \equiv y = \frac{-27}{16}x + \frac{97}{16} \text{ ou } 27x + 16y - 97 = 0$$

11. Point d'intersection entre E et $d : (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$

$$t \cap OX = \{Q\} \text{ avec } Q(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$n \cap OX = \{R\} \text{ avec } R(\frac{5\sqrt{2}}{6}, 0)$$

$$|QR| = \frac{13\sqrt{2}}{6}$$