

Chapitre 3. Primitivation

3.1. Définition

Soit f une fonction définie dans un intervalle ouvert I .

On appelle fonction primitive de la fonction f , de manière abrégée primitive de f , toute fonction F définie dans I telle que $F' = f$.

Si F est une primitive de f , on notera $F : I \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \int f(x)dx$

3.2. Existence et unicité

Existence

Théorème : Toute fonction définie et continue dans un intervalle ouvert I y admet au moins une primitive.

Unicité

1. *Théorème* : Si F et G sont des primitives d'une même fonction f définie dans un intervalle ouvert I , alors la fonction $F - G$ est une fonction constante dans I .

Deux primitives F et G d'une même fonction f sont ainsi égales à une constante additive près ; ce que l'on note : $F = G + k$ ou encore $F \equiv G$.

2. *Théorème* : Si F est une primitive de f alors pour tout réel k , la fonction $F + k$ est encore une primitive de f .

Toute fonction définie et continue dans un intervalle I admet donc, dans cet intervalle, une infinité de fonctions primitives différant entre elles par une constante.

3.3. Méthodes générales de primitivation

3.3.1. Primitives immédiates

$$\int k dx \cong k \cdot x \quad \text{où } k \text{ est une constante}$$

$$\int x^n dx \cong \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{avec } n \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x} dx \cong \ln|x|$$

$$\int \sin x dx \cong -\cos x$$

$$\int \cos x dx \cong \sin x$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx \cong \operatorname{tg} x$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx \cong -\cot g x$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \cong \operatorname{arctg} x$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} \cong \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \cong \arcsin x$$

$$\int e^x dx \cong e^x$$

$$\int a^x dx \cong \frac{a^x}{\ln a} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

3.3.2. Primitivation par décomposition

Théorème : Si f et g sont des fonctions définies et continues dans un intervalle ouvert I , si a et b sont

des constantes réelles, alors $\int (a \cdot f(x) + b \cdot g(x)) dx \cong a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$

Exemple

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx + 2 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int x^{3/2} dx + 2 \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{2x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{1/2} \\ &= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{4}{3} x \sqrt{x} + 2 \sqrt{x} + k \end{aligned}$$

3.3.3. Primitivation par substitution

Théorème : Si g est une fonction définie et dérivable dans un intervalle ouvert I , si f est une fonction définie et continue sur l'intervalle ouvert $g(I)$, si F est une primitive de f , alors :

$$\int f(g(x)) Dg(x) dx \cong (F \circ g)(x) \cong \left(\int f(t) dt \right)_{t=g(x)}$$

Exemples

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \frac{2x}{3+x^2} dx &= \int \frac{dt}{t} \quad \text{avec} \begin{cases} t = 3 + x^2 \\ dt = 2x dx \end{cases} \\ &= \ln |t| \\ &= \ln(3 + x^2) + k \\ \\ 2. \quad \int (x^3 + 5)^8 x^2 dx &= \frac{1}{3} \int (x^3 + 5)^8 (3x^2) dx \\ &= \frac{1}{3} \int t^8 dt \quad \text{avec} \begin{cases} t = x^3 + 5 \\ dt = 3x^2 dx \end{cases} \\ &= \frac{1}{3} \frac{t^9}{9} = \frac{1}{27} (x^3 + 5)^9 + k \end{aligned}$$

3.3.4. Primitivation par parties

Théorème : Si f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert I , alors :

$$\int f(x) \cdot Dg(x) dx \cong f(x) \cdot g(x) - \int Df(x) \cdot g(x) dx$$

Exemples

$$\begin{aligned} 1. \quad P_1 &= \int x \sin x dx \\ \text{Posons } f(x) &= x \quad \Rightarrow \quad Df(x) = 1 \\ Dg(x) &= \sin x \quad \Rightarrow \quad g(x) = -\cos x \\ \text{On obtient : } P_1 &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + k \\ \\ 2. \quad P_2 &= \int \arctan x dx \\ \text{Posons } f(x) &= \arctan x \quad \Rightarrow \quad Df(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ Dg(x) &= 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = x \end{aligned}$$

On obtient : $P_2 = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + k$

3. $P_3 = \int x^2 e^x dx$

Posons $f(x) = x^2 \Rightarrow Df(x) = 2x$

$Dg(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

On obtient : $P_3 = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$. Dans cette dernière primitive, posons

$f(x) = x \Rightarrow Df(x) = 1$

$Dg(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

Finalement : $P_3 = x^2 e^x - 2 (x e^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x = e^x (x^2 - 2x + 2) + k$

4. $P_4 = \int \cos(\ln x) dx$

Posons $f(x) = \cos(\ln x) \Rightarrow Df(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$

$Dg(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

On obtient $P_4 = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$

Dans cette dernière primitive, posons $f(x) = \sin(\ln x) \Rightarrow Df(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

$Dg(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

$P_4 = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - P_4$

$\Rightarrow 2 P_4 = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$ et finalement :

$P_4 = \frac{x}{2} (\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + k$

3.3.5. Primitivation par changement de variables

Théorème : Si g est une fonction continue, dérivable, strictement monotone dans un intervalle I , si f est une fonction définie et continue sur $g(I)$, alors :

$$\int f(x) dx \equiv \left(\int f(g(t)) Dg(t) dt \right)_{t=g^{-1}(x)}$$

Exemples

1. $P_1 = \int \sqrt{1-x^2} dx$

Effectuons le changement de variables $x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x$; $dx = \cos t dt$

avec $x \in]-1, 1[$ et $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On vérifiera que ce changement de variables vérifie

bien les hypothèses du théorème.

On obtient :

$$P = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \text{ (formule de Carnot)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) = \frac{1}{2} (\arcsin x + \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x))$$

$$= \frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + k \text{ (d'après les propriétés des fonctions cyclométriques)}$$

2. $P_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

Le changement de variable $2x-1 = t^4 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^4+1}{2} \\ dx = 2t^3 dt \end{cases}$ ramène la primitive à la forme :

$$P_2 = \int \frac{2t^3}{t^2-t} dt = 2 \int \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = (t+1)^2 + 2 \ln|t-1|$$

$$= (1 + \sqrt[4]{2x-1})^2 + \ln (\sqrt[4]{2x-1} - 1)^2 + k$$

3.4. Méthodes particulières de primitivation

3.4.1. Primitivation de fractions rationnelles

Remarque préliminaire

Nous supposons, sans restreindre la généralité, que les fractions rationnelles sont irréductibles c'est-à-dire que le polynôme numérateur et le polynôme dénominateur n'ont pas de racine commune.

Définitions

- Une fraction rationnelle est dite propre lorsque le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur. Elle est dite impropre dans le cas contraire.
- Les fractions rationnelles propres du type

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{où } k \text{ est un nombre entier positif } \geq 2$$

$$\text{III. } \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \quad \text{avec } p^2-4q < 0$$

$$\text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad \text{où } k \text{ est un nombre entier positif } \geq 2 \text{ et } p^2-4q < 0$$

sont appelées respectivement fractions simples des types I, II, III, IV.

Division euclidienne des polynômes

Théorème : Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle irréductible et impropre, il existe un et un seul

polynôme $M(x)$ et un et un seul polynôme $R(x)$ dont le degré est strictement inférieur au

$$\text{degré de } Q(x) \text{ tels que : } \frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

$M(x)$ et $R(x)$ peuvent s'obtenir par l'algorithme d'Euclide.

Exemple

Soit à décomposer la fraction $\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}$ en fractions simples. En vertu du théorème précédent, nous avons :

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}$$

Réduisons les fractions au même dénominateur et égalons les numérateurs. Nous trouvons :

$$x^2 + 2 = A(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x+1)^2(x-2) + D(x+1)^3 \quad (*)$$

En identifiant les deux polynômes, nous trouvons un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{cases} 0 = C + D \\ 1 = B + 3D \\ 0 = A - B - 3C + 3D \\ 2 = -2A - 2B - 2C + D \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $A = -1$; $B = \frac{1}{3}$; $C = -\frac{2}{9}$; $D = \frac{2}{9}$

On aurait pu également déterminer certains coefficients à partir des équations que l'on obtient de l'égalité (*) qui est une identité en x, en donnant à la variable x certaines valeurs particulières.

Ainsi, posons $x = -1$, nous trouvons $3 = -3A$ ou $A = -1$; posons $x = 2$, nous trouvons

$6 = 27D$; $D = \frac{2}{9}$. Si nous adjoignons à ces deux équations deux autres obtenues en égalant les

coefficients de même puissance de x, nous aurons 4 équations à 4 inconnues pour déterminer les coefficients ; on pourrait aussi écrire l'identité (*) pour 2 autres valeurs particulières de x et ainsi trouver les valeurs des 2 autres constantes B et C.

Nous avons en définitive la décomposition :

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}$$

Primitivation des fractions simples

$$\text{I. } \int \frac{A}{x-a} dx \cong A \ln|x-a|$$

$$\text{II. } \int \frac{A}{(x-a)^k} \cong \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} \quad \text{si } k \neq 1$$

$$\text{III. } \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx \cong \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx \cong \frac{A}{2} \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \quad \text{si } k \neq 1$$

$$\text{et, si l'on pose } I_k \cong \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \cong \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} \text{ avec } x + \frac{p}{2} = t, dx = dt, q - \frac{p^2}{4} = m^2,$$

$$I_k \cong \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \cdot I_{k-1} \text{ et}$$

$$I_1 \cong \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m}$$

Primitivation d'une fraction rationnelle quelconque

Les primitives des fractions simples sont connues.

Une fraction rationnelle propre non simple peut se décomposer en une somme de fractions simples.

La primitivation d'une fraction rationnelle propre non simple est donc la primitivation d'une somme de fractions simples.

Toute fraction rationnelle (supposée irréductible) impropre peut se mettre sous la forme d'une somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre.

La primitivation d'une fraction rationnelle impropre se décompose donc en une primitivation d'un polynôme et d'une somme de fractions simples.

Exemples

$$1. P_1 = \int \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} dx$$

$$\text{On a } \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\text{D'où } x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$$

$$\text{En prenant } x = 1 \text{ dans cette dernière identité, on trouve : } 1 = 4A \text{ c'est-à-dire } A = \frac{1}{4}$$

$$\text{En faisant } x = -1, \text{ on trouve } -1 = -2C, \text{ c'est-à-dire } C = \frac{1}{2}$$

$$\text{En faisant } x = 0, \text{ on trouve } 0 = A - B - C, \text{ c'est-à-dire } B = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Par conséquent } P_1 = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + k$$

$$2. P_2 = \int \frac{dx}{x^3-1}$$

$$\text{On a } \frac{1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\text{D'où } 1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\text{En faisant } x = 1, \text{ on trouve } A = \frac{1}{3}$$

$$\text{En identifiant les coefficients de } x^2 \text{ puis les termes indépendants de } x \text{ dans les deux membres de l'identité, on trouve } \begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = A - C \end{cases} \text{ c'est-à-dire } B = -\frac{1}{3} \text{ et } C = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Par suite } P_2 = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{3}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + k$$

$$\begin{aligned}
3. \quad P_3 &= \int \frac{x^4}{x^2-1} dx = \int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{(x+1)(x-1)} \right) dx \\
&= \int x^2 dx + \int dx + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} \\
\text{On a } \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\
\text{On en tire } A &= \frac{1}{2} \text{ et } B = -\frac{1}{2} \\
\text{Finalement } P_3 &= \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\
&= \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+1| = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + k
\end{aligned}$$

3.4.2. Primitivation de fonctions trigonométriques

$$\boxed{\int R(\sin x) \cos x dx} ; \boxed{\int R(\cos x) \sin x dx} \quad \text{où } R \text{ est une fonction rationnelle}$$

Dans le premier cas, la substitution $\sin x = t$ transforme la primitive en une primitive d'une fraction rationnelle. Dans le deuxième cas, la substitution $\cos x = t$ conduit au même résultat.

Exemple

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

Cette primitive se ramène aisément à une primitive du type $\int R(\cos x) \sin x dx$. En effet,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{2 + \cos x} \sin x dx$$

$$\text{Effectuons la substitution } \begin{cases} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx &= - \int \frac{1-t^2}{2+t} dt = \int \left(t - 2 + \frac{3}{t+2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3 \ln |t+2| \\
&= \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln |\cos x + 2| + k
\end{aligned}$$

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx$$

Le changement de variable $\operatorname{tg} x = t$; $x = \arctan t$; $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ transforme la primitive en une

primitive d'une fraction rationnelle : $\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(t) \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

où $\sin x$ et $\cos x$ n'apparaissent qu'aux puissances paires

Nous emploierons le changement de variable $\operatorname{tg} x = t$; $x = \arctan t$; $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$

car $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ peuvent s'exprimer par des expressions rationnelles de $\operatorname{tg} x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Après avoir effectué ce changement de variable, nous obtenons la primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple

$$P = \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}. \text{ Effectuons le changement de variable } t = \operatorname{tg} x.$$

$$P = \int \frac{dt}{\left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + k$$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

où m et $n \in \mathbf{Z}$

- m ou n est impair.

On se ramène aisément à l'un des deux cas du « a »

Exemple

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^4 x} dx$$

Posons $\sin x = t$; $dt = \cos x dx$, nous avons :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2)}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + k$$

- m et n sont des nombres pairs positifs

On utilise alors les formules de Carnot :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + k\end{aligned}$$

- si les deux exposants sont pairs et l'un d'eux au moins est négatif, on utilisera la méthode développée au point b.
-

$$\boxed{\int \cos mx \cos nx \, dx} ; \boxed{\int \sin mx \sin nx \, dx} ; \boxed{\int \sin mx \cos nx \, dx}$$

On peut les calculer en utilisant les formules suivantes :

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)]$$

Exemple

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) \, dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16}$$

$\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ où R est une fraction rationnelle quelconque

On utilise le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \arctan t$

On a en effet :

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

ce qui transforme la primitive en une primitive d'une fraction rationnelle :

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt + k$$

Exemple

Considérons la primitive $\int \frac{dx}{\sin x}$.

En vertu des formules précédentes, nous pouvons écrire

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + k$$

3.4.3. Primitivation de certaines classes d'irrationnelles

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \dots, \sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

En effectuant le changement de variable $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$ où k est le ppcm de $n, \dots, s$ on ramène cette primitive à celle d'une fraction rationnelle.

Exemple : $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$

Posons $\begin{cases} t^2 = x+4 \Leftrightarrow x = t^2 - 4 \\ dx = 2t dt \end{cases}$

On obtient : $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt$

$$= 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dx = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dx$$

$$= 2t + 2 \ln |t-2| - 2 \ln |t+2|$$

$$= 2\sqrt{x+4} + 2 \ln |\sqrt{x+4}-2| - 2 \ln |\sqrt{x+4}+2| + k.$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx \quad \text{avec } a \neq 0$$

1) $a > 0$

Posons $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$.

Alors : $ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2$;

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \quad \text{et} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a} \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t$$

Puisque $\sqrt{ax^2+bx+c}$, x , dx s'expriment par des fonctions rationnelles de t , la primitive recherchée est ramenée à une primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Posons $\sqrt{x^2+x+1} = x + t$.

On obtient : $x^2+x+1 = x^2 + 2tx + t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t}$

$$\text{D'où : } x^2 + x + 1 = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2(-t^2 + t - 2)}{(1 - 2t)^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= 2 \int \frac{1}{1 - 2t} dt = \\ &= -\ln |1 - 2t| = -\ln |2x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + k \end{aligned}$$

2) $\boxed{a < 0}$ et $p > 0$

On démontre facilement que le trinôme peut s'écrire :

$$ax^2 + bx + c = k^2 (\beta^2 - (x + a)^2), \quad k > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

Il suffit dès lors de poser : $x + a = \beta \sin t$.

$$\text{On a alors : } dx = \beta \cos t \, dt \quad \text{et} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = k \beta \sqrt{1 - \sin^2 t} = k \beta \cos t.$$

La primitive demandée se ramène ainsi à une primitive d'une fonction trigonométrique.

Exemple : $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx$

$$\text{On a : } 3 - 2x - x^2 = 4 - (x + 1)^2.$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} x + 1 = 2 \sin t \Rightarrow t = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ dx = 2 \cos t \, dt \end{cases}$$

$$\text{Alors : } \sqrt{3 - 2x - x^2} = 2 \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cos t.$$

$$\text{D'où : } \int \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx = 4 \int \cos^2 t \, dt = 2 \int (1 + \cos 2t) \, dt$$

$$= 2t + \sin 2t = 2t + 2 \sin t \cos t = 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\left(\frac{x+1}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

$$= 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right) + 2\left(\frac{x+1}{2}\right) \sqrt{3 - 2x - x^2} + k.$$

3.5. Exercices de primitivation

3.5.1. Primitivation par décomposition

1. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$
2. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$
3. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right)^2 dx$

3.5.2. Primitivation par substitution

4. $\int e^{5x} dx$
5. $\int \frac{1}{3x-7} dx$
6. $\int \frac{1}{1-x} dx$
7. $\int \frac{1}{5-2x} dx$
8. $\int \operatorname{tg} x dx$
9. $\int \operatorname{cotg}(5x-7) dx$
10. $\int \frac{1}{\operatorname{cotg} 3y} dy$
11. $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x dx$
12. $\int (\operatorname{cotg} e^x) e^x dx$
13. $\int \left(\operatorname{tg} 4x - \operatorname{cotg} \frac{x}{4} \right) dx$
14. $\int \sin^2 x \cos x dx$
15. $\int \cos^3 x \sin x dx$
16. $\int \sqrt{x^2+1} x dx$
17. $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$
18. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$
19. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$
20. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$
21. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x-1}} dx$
22. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$
23. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x + 1}} dx$
24. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$
25. $\int \frac{\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} dx$
26. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx$
27. $\int \frac{\cos 2x}{(2+3 \sin 2x)^2} dx$
28. $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}} dx$
29. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$
30. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

31. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

32. $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

33. $\int \frac{\operatorname{arccotg} x}{1+x^2} dx$

34. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

35. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$

36. $\int \frac{\cos x}{2\sin x+3} dx$

37. $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

38. $\int 2x(x^2+1)^4 dx$

39. $\int \frac{\ln x - 1}{x \ln x} dx$

40. $\int \frac{x}{x^4+1} dx$

41. $\int x(2x+3)^{12} dx$

42. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

43. $\int \sqrt{x}(2x+1)^2 dx$

44. $\int \frac{3x+1}{x^2+1} dx$

45. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$

46. $\int \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} dx$

47. $\int \frac{1}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)} dx$

48. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$

49. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx$

50. $\int \frac{\cos 2x}{2+3\sin 2x} dx$

51. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

52. $\int \cos(ax+b) dx$

53. $\int e^{2x} dx$

54. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

55. $\int 3^x e^x dx$

56. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$

57. $\int e^{x^2+4x+3} (x+2) dx$

58. $\int \frac{(a^x - b^x)}{a^x b^x} dx$

59. $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx$

60. $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}} dx$

3.5.3. Primitivation par parties

61. $\int x e^x dx$

62. $\int x \ln x dx$

63. $\int x \sin x dx$

64. $\int \ln x dx$

65. $\int \arcsin x dx$

66. $\int \ln(1-x) dx$

67. $\int x^n \ln x dx$

68. $\int x \operatorname{arctg} x dx$

69. $\int x \arcsin x dx$

70. $\int \ln(x^2+1) dx$

71. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x^2} dx$

72. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

73. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

74. $\int x \cos^2 x \, dx$

75. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

76. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^2} \, dx$

77. $\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} \, dx$

78. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx$

79. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$

80. $\int \arcsin x \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx$

81. $\int x^2 e^{-2x} \, dx$

82. $\int e^x \cos x \, dx$

3.5.4. Primitivation de fractions rationnelles

83. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} \, dx$

84. $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \, dx$

85. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \, dx$

86. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} \, dx$

87. $\int \frac{1}{x(x+1)^2} \, dx$

88. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} \, dx$

89. $\int \frac{x^4-6x^3+12x+6}{x^3-6x^2+12x-8} \, dx$

90. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} \, dx$

91. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2} \, dx$

92. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2} \, dx$

93. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} \, dx$

94. $\int \frac{x^4}{x^4-1} \, dx$

95. $\int \frac{1}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} \, dx$

96. $\int \frac{1}{x^3+1} \, dx$

97. $\int \frac{1}{x^4+1} \, dx$

98. $\int \frac{1}{x^4+x^2+1} \, dx$

99. $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$

100. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2} \, dx$

101. $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} \, dx$

102. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} \, dx$

103. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} \, dx$

104. $\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)} \, dx$

105. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \, dx$

106. $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} \, dx$

107. $\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} \, dx$

108. $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} \, dx$

109. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} \, dx$

110. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} \, dx$

- | | |
|--|--|
| 111. $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$ | 115. $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$ |
| 112. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$ | 116. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$ |
| 113. $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$ | 117. $\int \frac{4x-8}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$ |
| 114. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx$ | 118. $\int \frac{1}{(x^2-x)(x^2-x+1)^2} dx$ |

3.5.5. Primitivation de fonctions trigonométriques

- | | |
|--|--|
| 119. $\int \sin^3 x dx$ | 138. $\int \frac{1}{4-5\sin x} dx$ |
| 120. $\int \sin^5 x dx$ | 139. $\int \frac{1}{5-3\sin x} dx$ |
| 121. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$ | 140. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$ |
| 122. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ | 141. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$ |
| 123. $\int \cos^2 x dx$ | 142. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ |
| 124. $\int \sin^4 x dx$ | 143. $\int \frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}$ |
| 125. $\int \cos^6 x dx$ | 144. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x}$ |
| 126. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$ | 145. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$ |
| 127. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ | 146. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ |
| 128. $\int \operatorname{cotg}^5 x dx$ | 147. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}$ |
| 129. $\int \operatorname{cotg}^3 x dx$ | 148. $\int \frac{\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\sin x \cos x} dx$ |
| 130. $\int \sec^8 x dx$ | 149. $\int (\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{4}) dx$ |
| 131. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x dx$ | 150. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} dx$ |
| 132. $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx$ | 151. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ |
| 133. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ | |
| 134. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$ | |
| 135. $\int \sin x \sin 3x dx$ | |
| 136. $\int \cos 4x \cos 7x dx$ | |
| 137. $\int \cos 2x \sin 4x dx$ | |

$$152. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$$

3.5.6. Primitivation d'irrationnelles

$$153. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx$$

$$154. \int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{6 \sqrt[4]{x}} dx$$

$$155. \int \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} dx$$

$$156. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$$

$$157. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$$

$$158. \int \frac{\sqrt[7]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8} + \sqrt[14]{x^{15}}} dx$$

$$159. \int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx$$

$$160. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - x + 3}}$$

$$161. \int \frac{dx}{x \sqrt{2+x-x^2}}$$

$$162. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4x - 4}}$$

$$163. \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} dx$$

$$164. \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$$

$$165. \int \sqrt{2x-x^2} dx$$

$$166. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$167. \int \frac{dx}{(1+x) \sqrt{1+x+x^2}}$$

$$168. \int \frac{1 - \sqrt{1+x+x^2}}{x \sqrt{1+x+x^2}} dx$$

$$169. \int \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x^2} dx$$