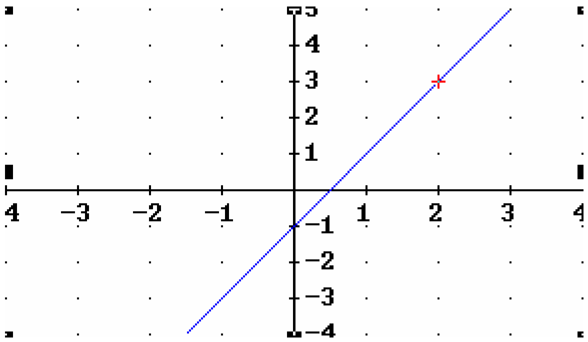
ANALYSE : LES LIMITES

Notion de prolongée continue

$f(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}$ D = R \ {2} $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$



La fonction est discontinue en x = 2 car 2 $\notin$ D
Son graphique est une droite (« sauf » le point (2,3))
f(x) n'est pas défini en x = 2 mais la limite existe et vaut 3.

Rem : $\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}=2x-1$ (après simplification)

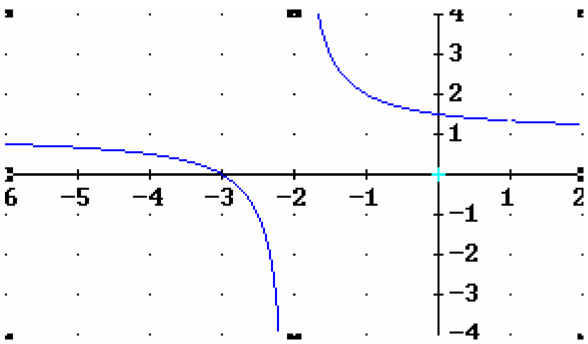
$f_p(x)$ = 2x – 1 admet R comme domaine et son graphique est la droite = y = 2x – 1 qui comprend le point (2,3). La fonction $f_p(x)$ est continue en x = 2 et s'appelle la prolongée continue de f(x).

$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$ D = R \ {-2,1}

$\lim\limits_{x\to -2\pm} f(x)=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to 1\pm} f(x)=4/3$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1^{\pm}$



La fonction est discontinue en x = -2 et en x = 1 car -2,1 $\notin$ D
Mais les limites en x = -2 et en x = 1 sont de types différents.

Rem : $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x+3}{x+2}$ D = R \ {-2}

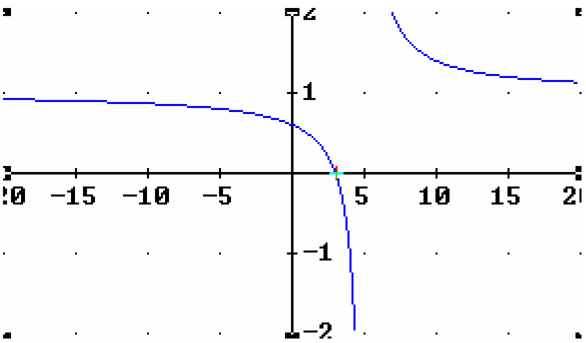
f(x) peut être prolongée en x = 1 (point (1,4/3)) mais pas en x = -2
On voit apparaître une asymptote verticale = x = -2 car $\lim_{x \to -2} f(x) = \infty$

Il y a aussi une asymptote horizontale = y = 1 car $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

Exercice :

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$$

Calcule le domaine et donne les points de discontinuité
Calcule les limites d'après le graphique



Que peux-tu déduire ?

solution :

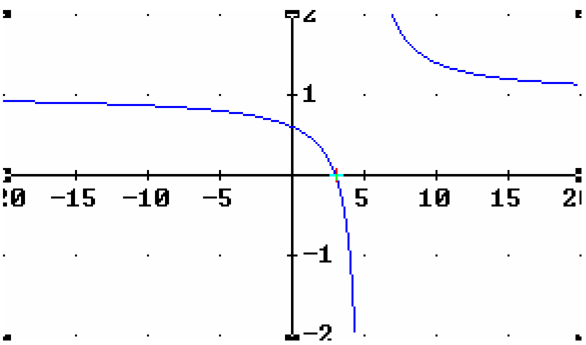
$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15}$$

D = R \ {3,5}

$\lim_{x \to 3\pm} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 5\pm} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1^{\pm}$



f(x) est discontinu en x = 3 et en x = 5 car 3,5 $\notin$ D

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$

D = R \ {5}

f(x) admet une prolongée continue en x = 3 (point(3,0)) mais pas en x = 5
On a une asymptote verticale = x = 5 car $\lim_{x \to 5} f(x) = \infty$

On a une asymptote horizontale = y = 1 car $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$