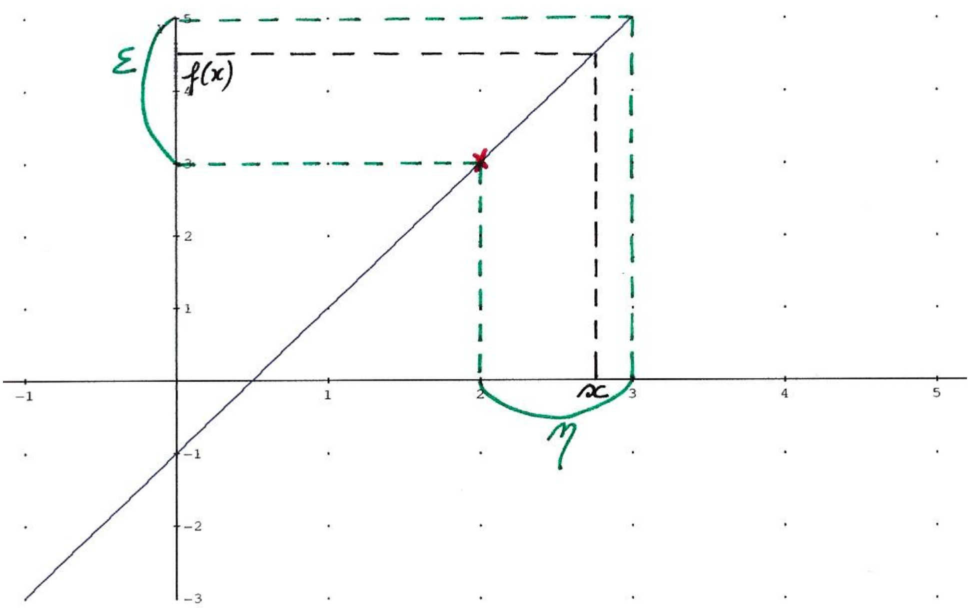
ANALYSE : LES LIMITES

Définitions

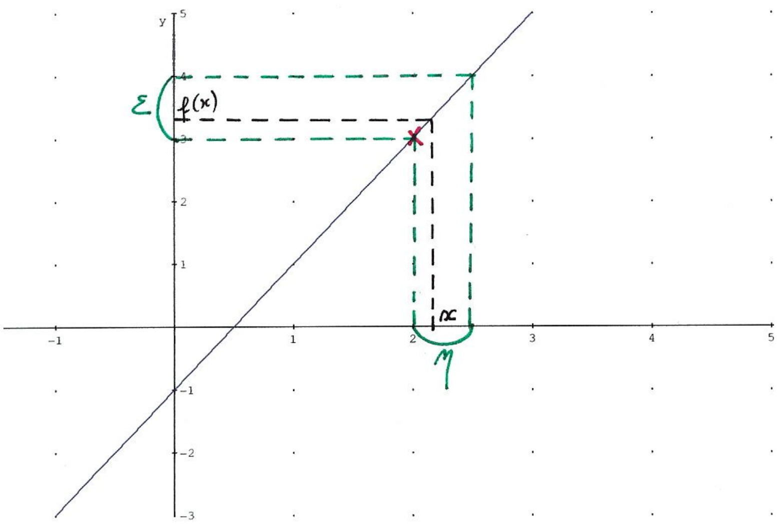
1er cas : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

exemple : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ D = R \ {2} $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

Considérons la limite à droite
Prenons une distance ε quelconque sur l'axe OY à partir de l'ordonnée 3, ce qui définit un voisinage de 3 (vy). A ε correspond η qui définit un voisinage de x=2.(vx)
Prenons x dans ce voisinage vx ; f(x) se trouve alors dans vy.



Considérons un ε plus petit et recommençons…



et ainsi de suite pour des ε de plus en plus petits …

Définition :

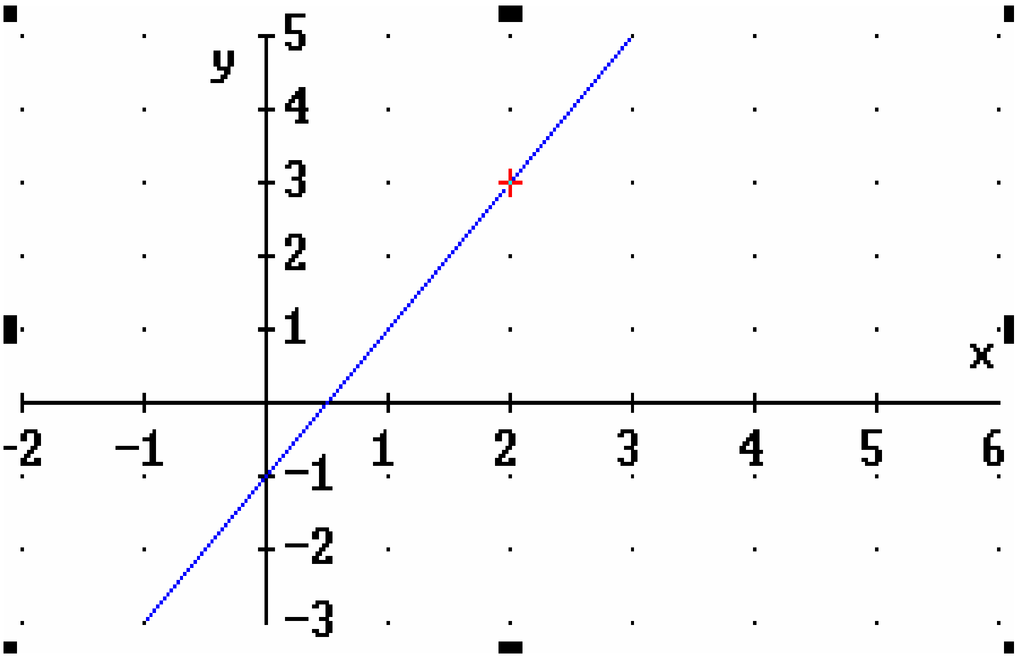
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \; tel \; que \; \forall x \in D, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon}$$

Rem : pour la limite à droite, la définition devient :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \text{ ssi}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \; tel \; que \; \forall x \in D, 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

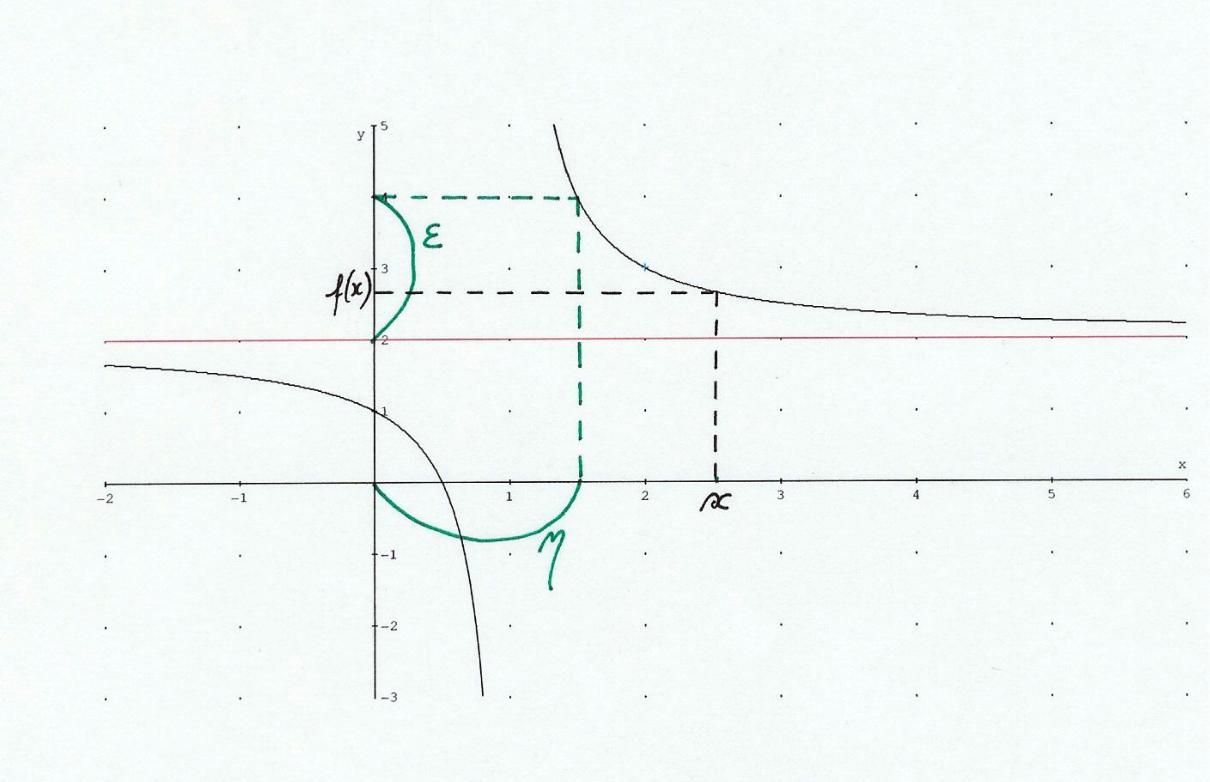
Faites la construction et le raisonnement pour la limite par la gauche et donnez la définition.



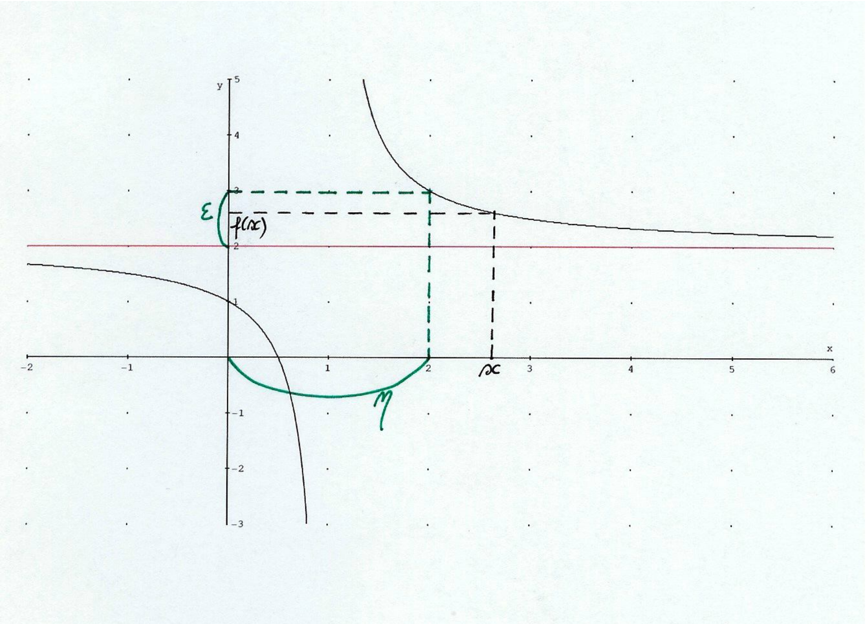
2ème cas : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$

exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$ D = R \ {1} $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^+$

Prenons une distance ε quelconque sur l'axe OY à partir de l'ordonnée 2, ce qui définit un voisinage de 2 (vy). A ε correspond η qui définit une abscisse η.Prenons x supérieur à η ; f(x) se trouve alors dans vy.



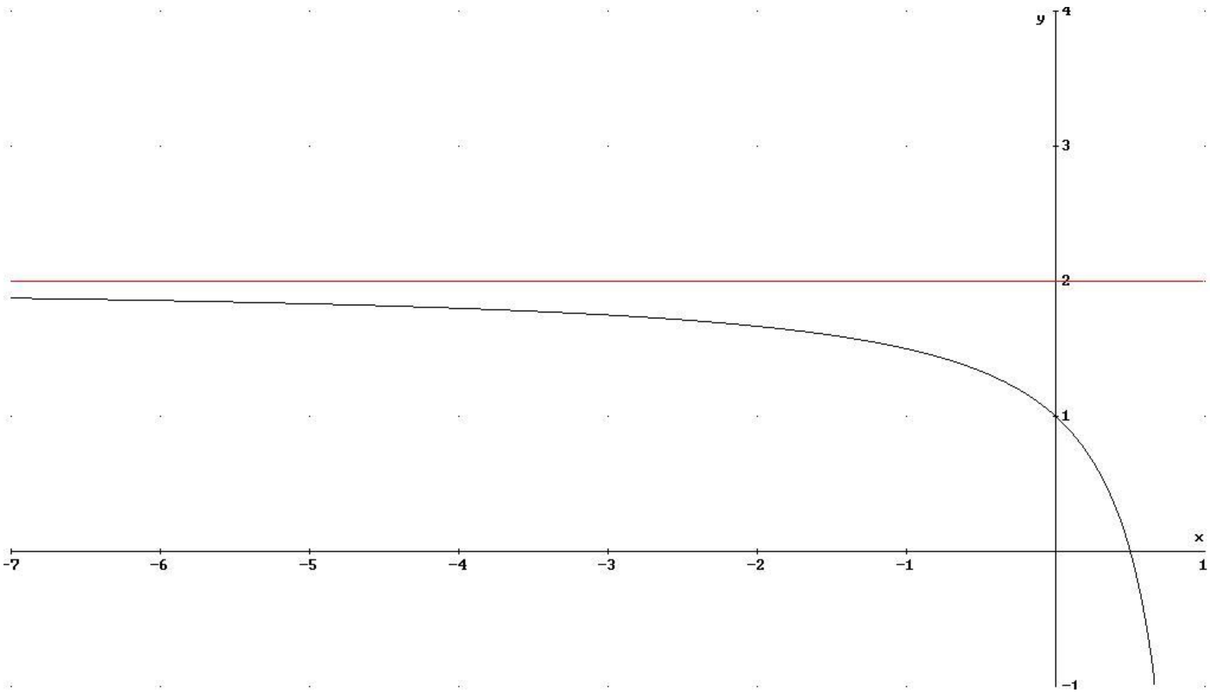
Considérons ε de plus en plus petit …



Définition :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ ssi } \forall\varepsilon > 0, \exists\eta(\varepsilon) > 0 \ tel\ que\ \forall x \in D, x > \eta \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon}$$

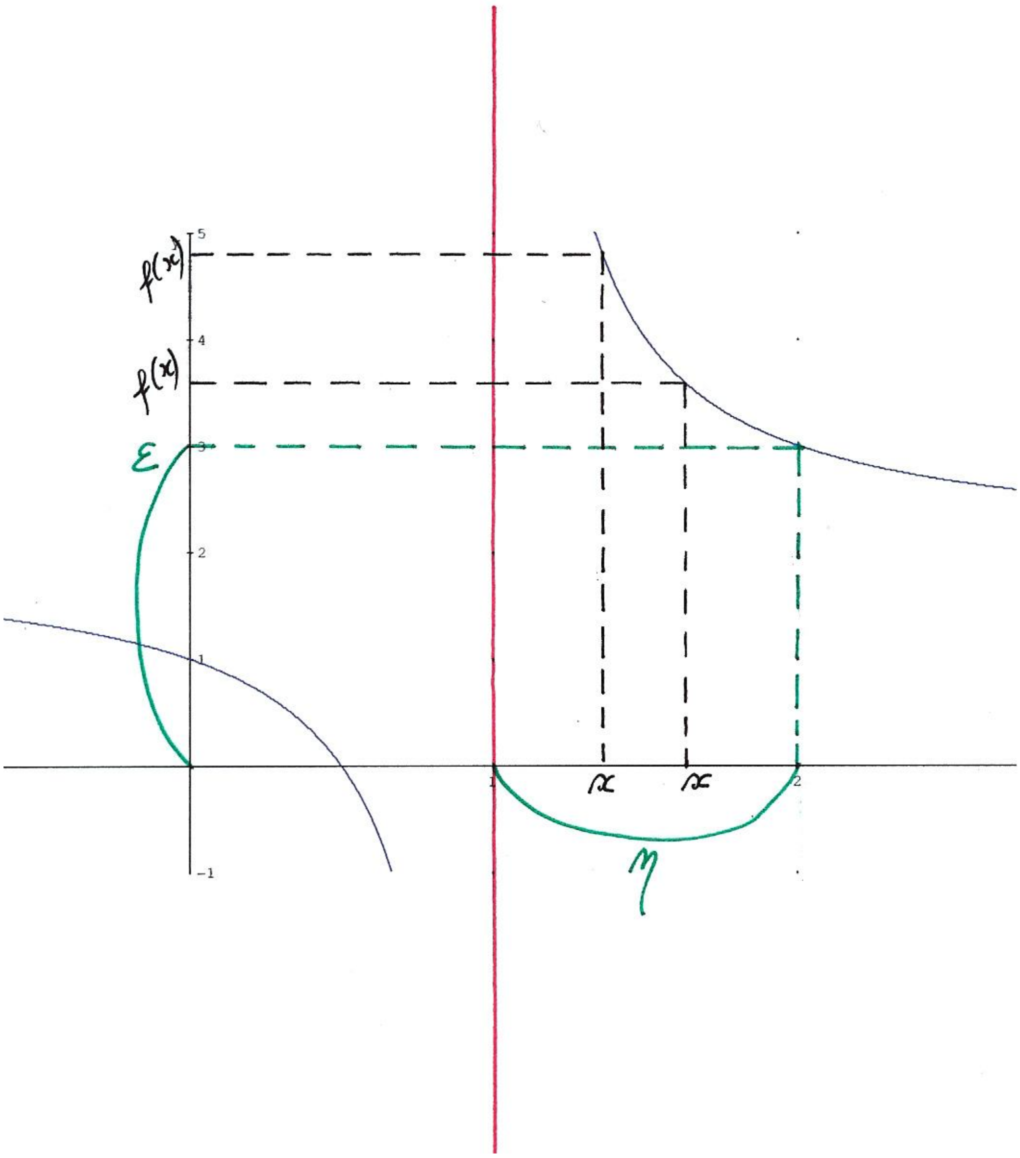
Faites la construction et le raisonnement pour $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots$ et donnez la définition



3ème cas : $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$ D = R \ {1} $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Prenons une distance ε quelconque sur l'axe OY à partir de l'ordonnée 0, ce qui définit une ordonnée ε. A ε correspond η qui définit un voisinage de 1 (vx) Prenons x dans ce voisinage vx ; f(x) est supérieur à ε.



Et ainsi de suite en prenant des ε de plus en plus grands …

Définition :

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ ssi } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 \; tel \; que \; \forall x \in D, 0 < |x-a| < \eta \Rightarrow f(x) > \varepsilon}$$

Faites la construction et le raisonnement pour $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ldots$ et donnez la définition

Résumé :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b \text{ ssi } \forall\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0 \ tel\ que\ \forall x\in D, 0<|x-a|<\eta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon}$$

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=b \text{ ssi } \forall\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0 \ tel\ que\ \forall x\in D, x>\eta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon}$$

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x)=b \text{ ssi } \forall\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0 \ tel\ que\ \forall x\in D, x<-\eta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ ssi } \forall\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0 \ tel\ que\ \forall x\in D, 0<|x-a|<\eta \Rightarrow f(x)>\varepsilon}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \text{ ssi } \forall\varepsilon>0,\exists\eta(\varepsilon)>0 \ tel\ que\ \forall x\in D, 0<|x-a|<\eta \Rightarrow f(x)<-\varepsilon}$$