ANALYSE : PROBLEMES D'EXTREMA

SOLUTIONS

Enoncé N°1

Constantes	***Variables***	***Fonction***
Périmètre(p)	longueur (x)	aire $f(x) = l.x = \dfrac{p-2x}{2}x$
	largeur l = $\dfrac{p-2x}{2}$	

Résolution

$$f(x) = \frac{p-2x}{2}x$$

$$f'(x) = -1x + \frac{p-2x}{2} = \frac{p-4x}{2}$$

x		p/4	
f'	+	0	-
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

Conclusion

L'aire du rectangle est maximum si la longueur vaut p/4.

La largeur vaut alors $\dfrac{p-2\frac{p}{4}}{2} = \dfrac{p}{4}$

Le rectangle est donc un carré.

Enoncé N°2

Constantes	***Variables***	***Fonction***
Aire (a)	base (x)	hypoténuse
	hauteur $h = \dfrac{2a}{x}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + \dfrac{4a^2}{x^2}}$
		(par thm de Pythagore)

Résolution

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 4a^2}}{x} (x > 0)$$

$$f'(x) = \left(\frac{(4x^3)x}{2\sqrt{x^4 + 4a^2}} - \sqrt{x^4 + 4a^2}\right)\frac{1}{x^2} = \frac{4x^4 - 2(x^4 + 4a^2)}{2x^2\sqrt{x^4 + 4a^2}} = \frac{2(x^4 - 4a^2)}{2x^2\sqrt{x^4 + 4a^2}} = \frac{x^4 - 4a^2}{x^2\sqrt{x^4 + 4a^2}}$$

x		$-\sqrt{2a}$		0		$\sqrt{2a}$	
f'	+	0	-	||	-	0	+
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	||	$\searrow$	min	$\nearrow$

Conclusion

L'aire sera minimum si la base vaut $\sqrt{2a}$. La hauteur sera alors $\dfrac{2a}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2a}$

Il s'agit donc d'un triangle rectangle isocèle.

Enoncé N°3

Constantes

Volume (v)

Variables

longueur (x)

largeur l =x

hauteur $h = \frac{v}{x^2}$

Fonction

aire $f(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x\frac{v}{x^2}$

Résolution

$$f(x) = \frac{x^3 + 4v}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 4v}{x^2}$$

x		0		$\sqrt[3]{2v}$	
f'	-	|	-	0	+
f	↘	|	↘	min	↗

Conclusion

L'aire sera minimum si la longueur et la largeur valent $\sqrt[3]{2v}$.

La hauteur vaut alors $\frac{\sqrt[3]{2v}}{2}$ et l'aire $3\sqrt[3]{4v^2}$