

ANALYSE : PROBLEMES D'EXTREMA

SOLUTIONS

Enoncé N°1

Constantes

Périmètre(p)

Variables

longueur (x)

largeur $l = \frac{p-2x}{2}$

Fonction

aire $f(x) = l \cdot x = \frac{p-2x}{2} x$

Résolution

$$f(x) = \frac{p-2x}{2} x$$

$$f'(x) = -1x + \frac{p-2x}{2} = \frac{p-4x}{2}$$

	x		p/4	
f		+		-
f		↘	0 max	↗

Conclusion

L'aire du rectangle est maximum si la longueur vaut $p/4$.

La largeur vaut alors $\frac{p-2 \cdot \frac{p}{4}}{2} = \frac{p}{4}$

Le rectangle est donc un carré.

Enoncé N°2

Constantes

Aire (a)

Variables

base (x)

hauteur $h = \frac{2a}{x}$

Fonction

hypoténuse

$$f(x) = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4a^2}{x^2}}$$

(par thm de Pythagore)

Résolution

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 4a^2}}{x} \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = \left(\frac{(4x^3)x}{2\sqrt{x^4 + 4a^2}} - \sqrt{x^4 + 4a^2} \right) \frac{1}{x^2} = \frac{4x^4 - 2(x^4 + 4a^2)}{2x^2\sqrt{x^4 + 4a^2}} = \frac{2(x^4 - 4a^2)}{2x^2\sqrt{x^4 + 4a^2}} = \frac{x^4 - 4a^2}{x^2\sqrt{x^4 + 4a^2}}$$

x		$-\sqrt{2a}$		0		$\sqrt{2a}$	
f	+	0	-	-	0	+	
f		m a x			m i n		

Conclusion

L'aire sera minimum si la base vaut $\sqrt{2a}$. La hauteur sera alors $\frac{2a}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2a}$

Il s'agit donc d'un triangle rectangle isocèle.

Enoncé N°3

Constantes

Volume (v)

Variables

longueur (x)

largeur l = x

hauteur $h = \frac{v}{x^2}$

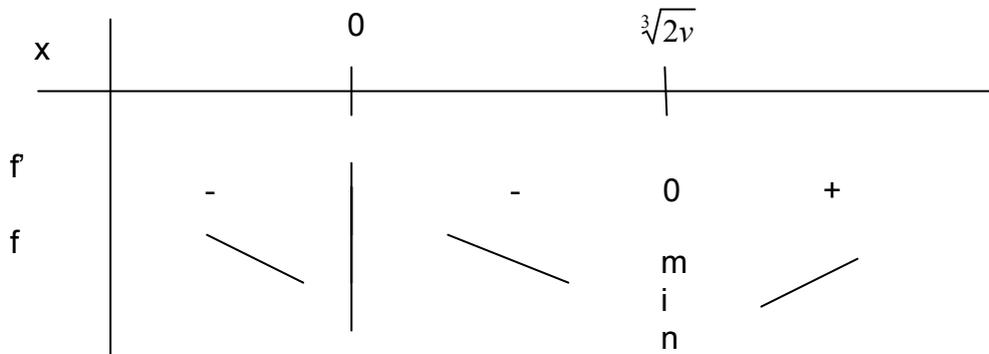
Fonction

aire $f(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \frac{v}{x^2}$

Résolution

$$f(x) = \frac{x^3 + 4v}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 4v}{x^2}$$



Conclusion

L'aire sera minimum si la longueur et la largeur valent $\sqrt[3]{2v}$.

La hauteur vaut alors $\frac{\sqrt[3]{2v}}{2}$ et l'aire $3\sqrt[3]{4v^2}$