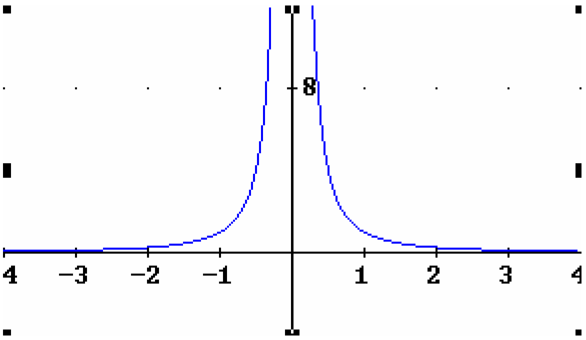
ANALYSE : LES LIMITES

Recherche des limites d'après définitions

Utilisation des définitions en e h

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0+$$

$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : x < -h \Rightarrow |f(x) - 0| < e$$

$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : x < -h \Rightarrow f(x) < e$$

$$f(x) < e$$

$$\frac{1}{x^2} < e$$

$$x^2 > \frac{1}{e}$$

$$si \ \ x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{e}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1}{e}}, +\infty\right[$$

$$alors \ on \ a \ x^2 > \frac{1}{e}$$

donc il suffit de prendre $h = \sqrt{\frac{1}{e}}$ pour que

si $x < -h$, on ait $f(x) < e$

donc on a prouvé l'existence de h en fonction d'un e choisi arbitrairement.

exemples

si e = 0,5 alors h =v 2 ; si e = 0.05, alors h = 4.47 ; si e = 0.0005, alors h = 44,72

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0+$$
$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : x > h \Rightarrow |f(x) - 0| < e$$
$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : x > h \Rightarrow f(x) < e$$

$f(x) < e$

$\frac{1}{x^2} < e$

$x^2 > \frac{1}{e}$

$si\ x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{e}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1}{e}}, +\infty\right[$

$alors\ on\ a\ x^2 > \frac{1}{e}$

donc il suffit de prendre $h = \sqrt{\frac{1}{e}}$ pour que
si $x > h$, on ait $f(x) < e$
donc on a prouvé l'existence de h en fonction d'un e choisi arbitrairement.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$$
$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : 0 < |x - 0| < h \Rightarrow f(x) > e$$
$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : -x < h \Rightarrow f(x) > e$$
$$\forall e > 0, \exists h(e) > 0 : \forall x \in D : x > -h \Rightarrow f(x) > e$$

$f(x) > e$

$\frac{1}{x^2} > e$

$x^2 < \frac{1}{e}$

$si\ x \in \left]-\sqrt{\frac{1}{e}}, \sqrt{\frac{1}{e}}\right[$

$alors\ on\ a\ x^2 < \frac{1}{e}$

donc il suffit de prendre $h = \sqrt{\frac{1}{e}}$ pour que si $x > -h$ ou $x > -\sqrt{\frac{1}{e}}$ on ait $f(x) > e$
donc on a prouvé l'existence de h en fonction d'un e choisi arbitrairement.

exercice : $\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$