$f_5(x) = \sqrt{x^2(x+1)}$

D = $[-1,+\infty[$ R_0
ni pair, ni impair
inters. avec OY : (0,0); inters. avec OX : (0,0) et (-1,0)
pas d'asymptote.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} si\ x > 0 \\ -\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} si -1 < x < 0 \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f'(x) = 1 \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f'(x) = -1$$

f'(x) n'est pas dérivable en x = -1
Au point (0,0), on a deux tangentes :
$t_1 \equiv y = x$ (par la droite) $t_2 \equiv y = -x$ (par la gauche)
(0,0) est un point anguleux

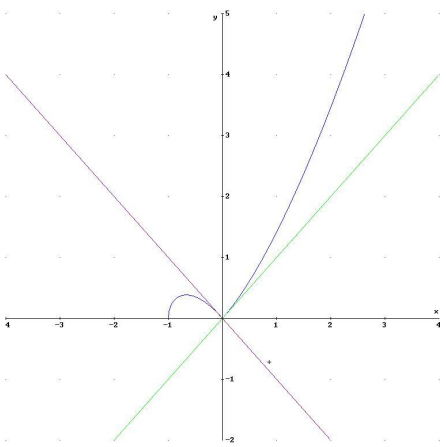
x	-1		-2/3		(0)	
f'(x)	/	+	0	-		+

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}} si\ x > 0 \\ -\dfrac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}} si -1 < x < 0 \end{cases}$$

x	-1		(0)	
f'(x)	/	-		+

tableau récapitulatif

x	-1		-2/3		(0)	
f'(x)	/	+	0	-		+
f''(x)	/	-	-	-		+
f(x)	(-1,0)	⌒	Max	⌒	pt angul	⌒ Max (-2/3 ;0,4)



$f_7(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt{x}$

D = $[0,+\infty[$
ni pair, ni impair
inters. avec OY (0,0) ; inters. avec OX : (0,0) et (1,0)

signe de f(x) :

$\sqrt{x^3} - \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3} > \sqrt{x} \Leftrightarrow x^3 > x\ (vu\ dom) \Leftrightarrow x^3 - x > 0$

x		0		1	
f(x)	-	0	-	0	+

pas d'asymptote

$f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

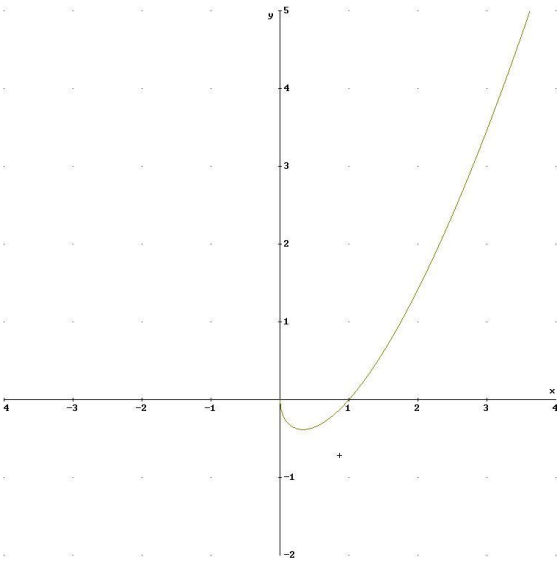
x		0		1/3	
f'(x)	/	-	0	+	

$f''(x) = \dfrac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$

x	0	
f''(x)	/	+

tableau récapitulatif

x	0		1/3		
f'(x)	/	-	0	+	
f''(x)	/	+	+	+	
f(x)	0		min		min (1/3 ;-0,4)



$f_8(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+2)}$

D = $[-2,+\infty[$ I = R_{0+}

ni pair, ni impair

inters. avec OY : $(0,\sqrt{2})$; inters. avec OX : (1,0) et (-2,0)

pas d'asymptote.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} \; si \; x > 1 \\ -\dfrac{3(x+1)}{2\sqrt{x+2}} \; si \; -2 < x < 1 \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f'(x) = \sqrt{3} \qquad \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f'(x) = -\sqrt{3}$$

f'(x) n'est pas dérivable en x = 1

Au point (1,0), on a deux tangentes :

$t_1 \equiv y = \sqrt{3}\,(x-1)$ (par la droite) 60°

$t_2 \equiv y = -\sqrt{3}\,(x-1)$ (par la gauche) 120°

(1,0) est un point anguleux

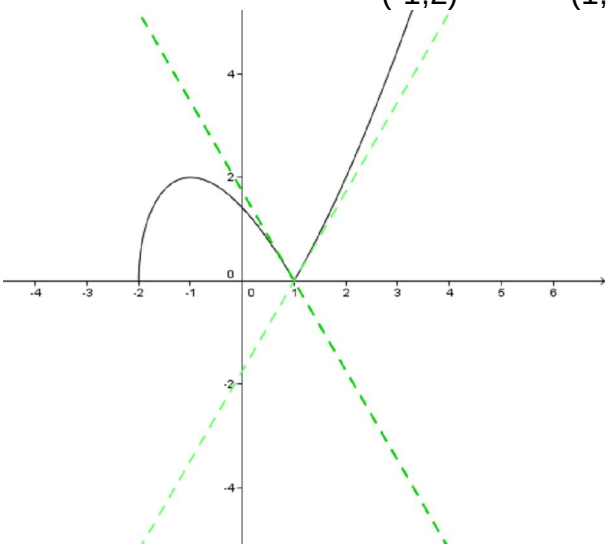
x	-2		-1		(1)	
f'(x)	/	+	0	-		+

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x+3)}{4(x+2)\sqrt{x+2}} \; si \; x > 1 \\ -\dfrac{3(x+3)}{4(x+2)\sqrt{x+2}} \; si \; -2 < x < 1 \end{cases}$$

x	-2		(1)	
f'(x)	/	-		+

tableau récapitulatif

x	-2		-1		(1)	
f'(x)	/	+	0	-		+
f''(x)	/	-	-	-		+
f(x)	(-2,0)		Max (-1,2)		pt angul (1,0)	



$$f_{15}(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+6x+9}}$$

rem : la fonction peut s'écrire $f_{16}(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x+3|}$

D = $]-\infty,-3[\cup]-3,-1]\cup[1,+\infty[$

ni pair, ni impair

inters. avec OY : /; inters. avec OX : (-1,0) et (1,0)

f(x) : ≥ 0

A.V. ≡ x = -3 $\lim_{\substack{x\to -3\\ <\\ >}} f(x)=+\infty$

A.H. ≡ y = 1 $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$

$\lim_{x\to\pm\infty}\delta(x)=$

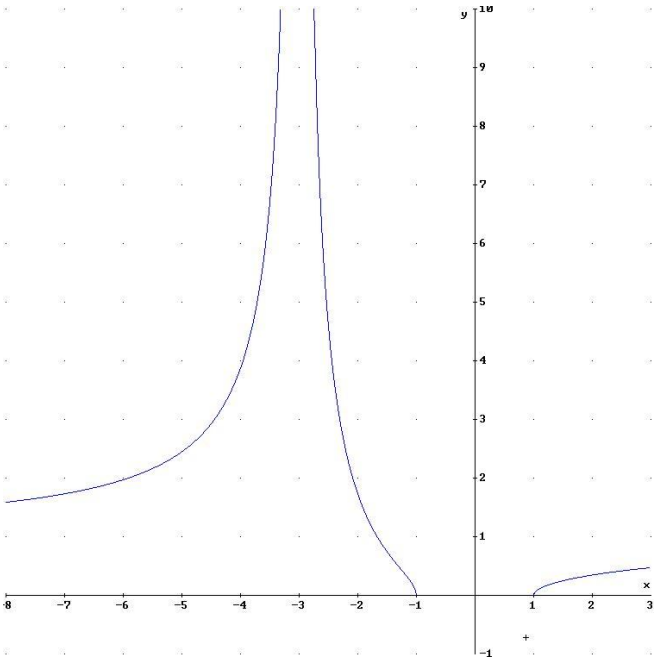
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+6x+9}}-1=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-6x-10}{\sqrt{x^2+6x+9}(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+6x+9})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-6x}{2x^2}=0^{\mp}$$

pas d'A.O.

$$f'(x)=\frac{3x^2+10x+3}{(x^2+6x+9)\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+6x+9}}=\frac{3x+1}{(x+3)\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+6x+9}}$$

x		-3		-1		-1/3		1	
f'(x)	+	/	-	/	/	/	/	/	+
f(x)	↑	A.V.	↓	0	/	/	/	0	↑

on ne calculera pas f''(x)



on voit apparaître un point d'inflexion sur]-2,-1[

$f_{17}(x) = \sqrt{(x-3)^2(x+4)}$

D = [–4,+∞[
ni pair, ni impair
inters. avec OY (0,6) ; inters. avec OX : (-4,0) et (3,0)
f(x)⩾0
pas d'asymptote

$$f'(x) = \frac{(x-3)(3x+5)}{2\sqrt{(x-3)^2(x+4)}} = \begin{cases} \frac{3x+5}{2\sqrt{x+4}} \; si \; x > 3 \\ -\frac{3x+5}{2\sqrt{x+4}} \; si \; x < 3 \end{cases}$$

x		-4		-5/3		(3)	
f'(x)	/	/	+	0	-	/	+

f(x) n'est pas dérivable en x = 3

$$\lim_{\substack{x\to 3 \\ > \\ <}} f'(x) = \pm 2\sqrt{7}$$

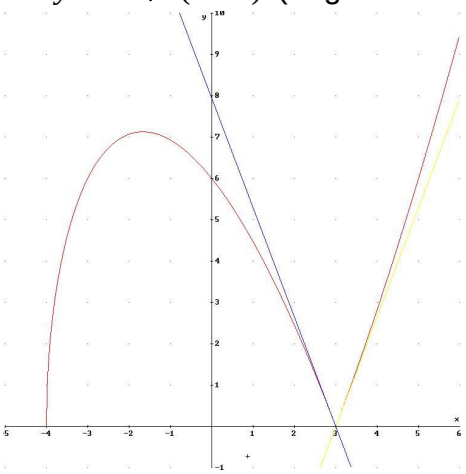
$$f''(x) = \pm\frac{3x+19}{4(x+4)\sqrt{x+4}}$$

x		-19/3		-4		(3)	
f''(x)	/	/	/	-	/	+	

tableau récapitulatif

x	-4		-5/3		3	
f'(x)	/	+	0	-	/	+
f''(x)	/	-	-	-	/	+
f(x)	0	⌒	Max	⌒	pt anguleux	⌒

Max (-5/3 ;7,1)
pt anguleux (3,0)
$t \equiv y = \pm 2\sqrt{7}(x-3)$ (angle d'inclinaison 79° et 101°)



$$f_{11}(x)=\sqrt{x^4-x^2}=\begin{cases}|x|\sqrt{x^2-1}\ si\ x\neq 0\\ 0\ si\ x=0\end{cases}$$

D = $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\cup\{0\}$

Rem : (0,0) est un point isolé

On étudie la fonction sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

f(x) pair d'où on étudie sur $[1,+\infty[$

inters. avec OY (0,0) ; inters. avec OX : (-1,0) ; (1,0) ; (0,0)

f(x)$\geqslant$0

pas d'asymptote

$$f'(x)=\frac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2}}=\frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\ si\ x>1$$

x		(1)	
f'(x)	/	/	+

$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f'(x)=+\infty$

$$f''(x)=\pm\frac{x(2x^2-3)}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

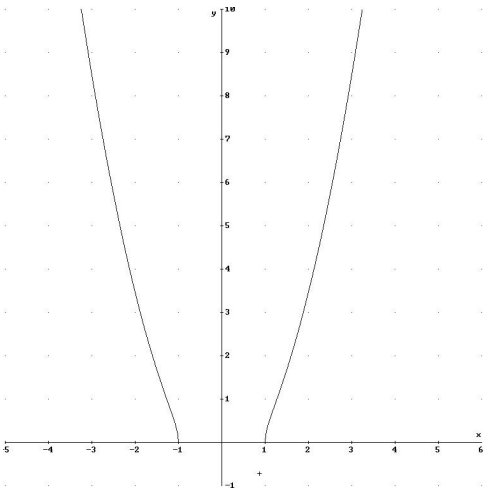
x		(1)		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
f''(x)	/	-	0		+

tableau récapitulatif

x		(1)		$\sqrt{\frac{3}{2}}$	
f'(x)	/	+	+		+
f''(x)	/	-	0		+
f(x)	0	⌒	P.I.	⌒	P.I. $(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$f'(\sqrt{\frac{3}{2}})=2\sqrt{2}$)

La tangente au P.I. a un angle d'inclinaison de 71°



$f_{12}(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}$

D = R

ni pair, ni impair

inters. avec OY $(0, \sqrt[3]{2})$; inters. avec OX : (-2,0) et (1,0)

x		-2		1	
f(x)	-	0	+	0	+

pas d'A.V, pas d'A.H.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^2(x+2) - x^3}{\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^2} + x\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x+2}{3x^2} = 0^{\mp}$$

A.O. ≡ y = x

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+2)+(x-1)^2}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+2)^2}} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$$

x		-2		-1		1	
f'(x)	+	/	+	0	-	/	+

f(x) n'est pas dérivable en x = -2 et x = 1 et admet un max en (-1 ;1.59)

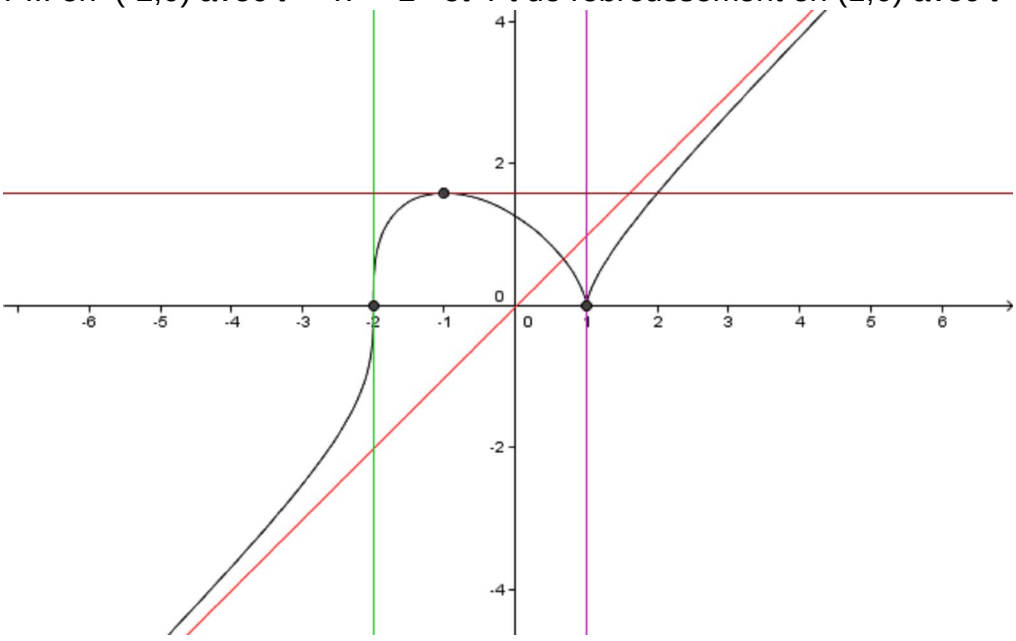
$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ > \\ <}} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to -1 \\ > \\ <}} f'(x) = \mp\infty$$

rem : les tangentes en (-2,0) et (1,0) sont parallèles à OY

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+2)\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}}$$

x		-2		1	
f''(x)	+	/	-	/	-

P.I. en (-2,0) avec t ≡ x = -2 et Pt de rebroussement en (1,0) avec t ≡ x = 1



$$f_{13}(x)=\frac{\sqrt{3-2x}}{(x-1)^2}$$

$$D=]-\infty,1[\cup]1,\frac{3}{2}]$$

ni paire, ni impaire

inters. avec OY (0,√3); inters. avec OX : (3/2,0)

$f(x)\geq 0 \; sur \; D$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=+\infty$ d'où A.V. ≡ x = 1

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=0+$ d'où A.H. ≡ y = 0

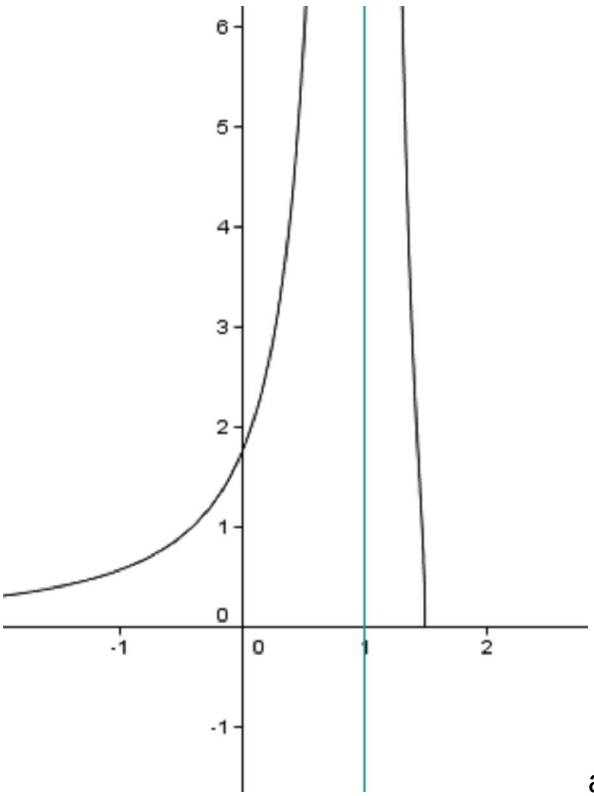
pas A.O.

$$f'(x)=\frac{3x-5}{(x-1)^3\sqrt{3-2x}}$$

x		(1)		3/2
f'(x)	+	/	-	/

$$f''(x)=\frac{15x^2-50x+41}{(x-1)^4(3-2x)\sqrt{3-2x}}$$

x		(1)		1.4		3/2
f''(x)	+	/	+	0	-	/



attention : il y a P.I. en (1.4 ;1.45) qui est peu marqué sur le graphique

$f_{14}(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x-2}}$

$D =]\dfrac{2}{3}, +\infty[$

ni pair, ni impair

pas d'intersection avec les axes

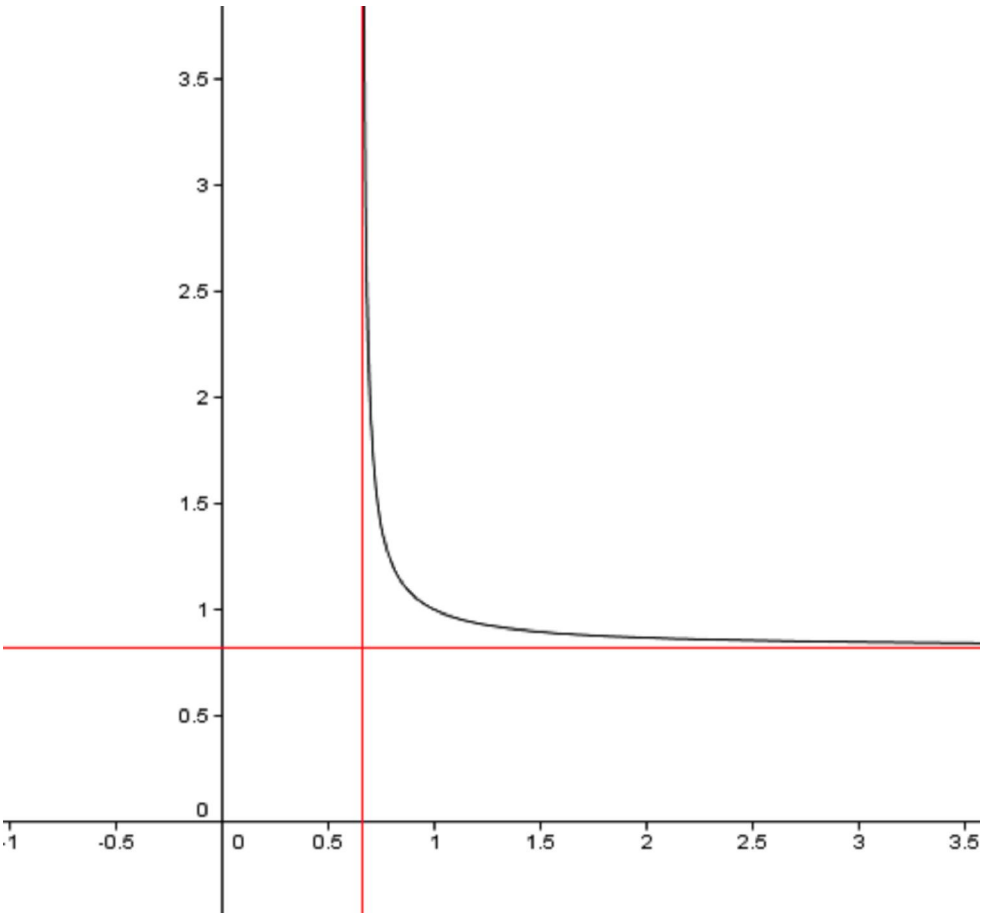
f(x) > 0 sur D

$\lim\limits_{x \to 2/3+} f(x) = +\infty$ d'où A.V. ≡ x = 2/3

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cong 0.8$ d'où A.H. ≡ y = 0.8

pas A.O.

$f'(x) = \dfrac{-1}{2(3x-2)\sqrt{(2x-1)(3x-2)}}$ < 0 d'où f(x) strict. décroissante

$f''(x) = \dfrac{72x^2 - 87x + 26}{4(3x-2)^3(2x-1)\sqrt{(2x-1)(3x-2)}}$

x		2/3
f''(x)	/	+