

ANALYSE : LES DOMAINES

Calculs de domaines

Prérequis : résolutions d'équations et d'inéquations (+tableaux de signes)

Pour trouver le domaine d'une fonction, il faut :

- 1) écrire les conditions d'existence
- 2) résoudre ces conditions

Résumé sur les conditions d'existence :

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \quad \text{C.E.: } D(x) \neq 0$$

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)} \text{ (avec } n \text{ pair)} \quad \text{C.E.: } R(x) \geq 0$$

$$f(x) = \frac{N(x)}{\sqrt[n]{R(x)}} \text{ (avec } n \text{ pair)} \quad \text{C.E.: } R(x) > 0$$

$$f(x) = \tan R(x) \quad \text{C.E.: } R(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$f(x) = \cot R(x) \quad \text{C.E.: } R(x) \neq k\pi$$

Rem : s'il n'y a pas de condition d'existence, le domaine est $\mathbb{R}$

Exercices (niveau 4^{ème})

première série

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-2x}{x+1} & f(x) &= \frac{3x}{x^2-10x+25} & f(x) &= \sqrt{5-7x} & f(x) &= \sqrt{4x^2-49} & f(x) &= \sqrt{x^2+10x+9} \\ f(x) &= \sqrt{x^2+4x+4} & f(x) &= \sqrt{x^2} & f(x) &= \frac{2x}{\sqrt{-x^2+x-2}} & f(x) &= \sqrt[3]{5x+4} & f(x) &= |2-7x| \\ f(x) &= \frac{\sqrt{x+3}}{2x^2} & f(x) &= \frac{\sqrt{3x+1}}{\sqrt{1-2x}} & f(x) &= \sqrt{\frac{3x}{9+x^2}} & f(x) &= \frac{1}{\cos x} & f(x) &= \sqrt{\sin x} & f(x) &= \frac{\sqrt{4-x}}{x\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

deuxième série

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-2x}{x-12} & f(x) &= \frac{3x}{-x^2+10x-25} & f(x) &= \sqrt{5-11x} & f(x) &= \sqrt{-49x^2+4} & f(x) &= \sqrt{-3x^2+16x-5} \\ f(x) &= \sqrt{x^2+6x+9} & f(x) &= \sqrt{25x^2} & f(x) &= \frac{2x}{\sqrt{-x^2+x-5}} & f(x) &= \sqrt[3]{5x-4} & f(x) &= |2+7x| \\ f(x) &= \frac{\sqrt{x+4}}{2x^2} & f(x) &= \frac{\sqrt{1-3x}}{\sqrt{1+2x}} & f(x) &= \sqrt{\frac{3x}{-9-x^2}} & f(x) &= \frac{1}{\sin x} & f(x) &= \sqrt{\cos x} & f(x) &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+5}} \end{aligned}$$

Solutions des exercices de la première série

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{5\} \quad D =]-\infty, \frac{5}{7}] \quad D =]-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [\frac{7}{2}; +\infty[\quad D =]-\infty, -9] \cup [-1, +\infty[$$

$$D = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R} \quad f(x) \text{ n'existe pas} \quad D = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R}$$

$$D = [-3, 0[\cup]0, +\infty[\quad D =]-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[\quad D = [0, +\infty[\quad D = \mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k2\pi, (2k+1)\pi] \quad D =]-1, 0[\cup]0, 4]$$

Solutions des exercices de la deuxième série

$$D = \mathbb{R} \setminus \{12\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{5\} \quad D =]-\infty, \frac{5}{11}] \quad D = [-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}] \quad D = [\frac{1}{3}, 5]$$

$$D = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R} \quad f(x) \text{ n'existe pas} \quad D = \mathbb{R} \quad D = \mathbb{R}$$

$$D = [-4, 0[\cup]0, +\infty[\quad D =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}[\quad D =]-\infty, 0] \quad D = \mathbb{R} / \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi] \quad D =]-5, 1[\cup]1, 2]$$

Rechercher les domaines et comparer les fonctions

$$1. \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$2. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-4}}$$

$$3. \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{1-x}} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{1-x}}$$

$$4. \quad f(x) = \sqrt{(x+1)^2} \quad g(x) = (\sqrt{x+1})^2$$

Solutions

$$1. \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} = g(x) \text{ sur leur domaine commun } \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$2. \quad D_f =]-\infty, -2] \cup]4, +\infty[\quad D_g =]4, +\infty[$$

Sur leur domaine commun : $]4, +\infty[$, on peut écrire

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-4}} \text{ car les deux radicands sont positifs d'où } f(x) = g(x)$$

$$3. \quad D_f =]1, 5] \quad D_g \text{ est l'ensemble vide (} g(x) \text{ n'existe pas)}$$

4. $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{sur } [-1, +\infty[\\ -x-1 & \text{sur }]-\infty, -1] \end{cases}$$

$f(x) = g(x)$ sur leur domaine commun $[-1, +\infty[$

$D_g = [-1, +\infty[$

$g(x) = x + 1$ sur $[-1, +\infty[$