ANALYSE : LES LIMITES

Cas d'indétermination

Revoir au préalable toutes les méthodes

Calculer le domaine et les limites indiquées
rem : pour ∞, envisager éventuellement $+\infty$ et $-\infty$

Première série

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+6}{x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 8\pi/7}{\sqrt{x-1}}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-5}{(3+x)^3}$

4) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^5+5x^2-8$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{-x^2+x+2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x^2-x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{4x+13}-5}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} x+\sqrt{9x^2-1}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x}{\sqrt{4x^2+1}+x}$

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^5+2x-1}{2x^4+5}$

modifier le terme « $2x^4$ » pour que la limite soit a) 0^+ b) 5/6

Seconde série

1) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-x}{x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-3}{9-x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{-2x^2+x+3}$

5) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{-x^2+9x-8}{x^2-16x+64}$

6) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{1+x}-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x-1}{\sqrt{x-2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{6x-2}}$

9) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{19-8x}-\sqrt{x+10}}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{8}{1-x}$

11) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-12}{\sqrt{1-3x}}$

12) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$

13) $\lim\limits_{x\to \infty} (2x+3x^5+1)$

14) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8x-5}{9x+1}$

Modifier le terme « 8x » pour avoir

1° $\lim = +\infty$

2° $\lim = 0^-$

3° $AH \equiv y = \dfrac{7}{4}$

15) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3-x}}$

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{21-4x}{3-x}}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{\sqrt{5x+1}}$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4})$

19) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2\cos x}{1-\sin\dfrac{x}{2}}$

20) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{5-2tg\dfrac{x}{2}}{\cos x-\dfrac{1}{2}}$

Réponses des exercices de la première série

Domaines

1) R\{0}   2)]1,+ ∞[3) R\{-3}   4) R   5)R\{-1,2}

6)]- ∞,0[U]1,+∞[7)[-13/4,3[U]3,+ ∞[8)]- ∞,-1/3]U[1/3,+∞[

9)]- ∞,-√1/3]U[-√1/3,+ ∞[10) R

Limites

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ < \\ >}} \frac{8x+6}{x^3} = "\frac{-1}{0^{\mp}}" = \pm\infty$$

$$2)\ \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sin 8\pi/7}{\sqrt{x-1}} = "\frac{-}{0^{+}}" = -\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5}{(3+x)^3} = "\frac{-}{\pm\infty}" = 0^{\mp}$$

$$4)\ \lim_{x\to\pm\infty} 3x^5 + 5x^2 - 8 = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^5 = \pm\infty$$

$$5)\ \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{-x^2+x+2} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)}{-(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2-x}}="\frac{0}{0}"=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x^2)\sqrt{x^2-x}}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x)\sqrt{x^2-x}}{x(x-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{-(1+x)\sqrt{x^2-x}}{x}=0$

7) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{4x+13}-5}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{4x+13}+5)}{4x+13-25}=$

$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{4x+13}+5)}{4x+13-25}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(\sqrt{4x+13}+5)}{4}=4$

8) $\lim_{x\to+\infty} x+\sqrt{9x^2-1}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{9x^2-1}="-\infty+\infty"=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+\sqrt{9x^2-1})(x-\sqrt{9x^2-1})}{x-\sqrt{9x^2-1}}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-8x^2+1)}{x-\sqrt{9x^2-1}}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x^2}{x-|3x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x^2}{4x}=\lim_{x\to-\infty}-2x=+\infty$

9) $\lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{\sqrt{4x^2+1}+x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x}{3x}=3$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{9x}{\sqrt{4x^2+1}+x}=\frac{-\infty}{+\infty-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x(\sqrt{4x^2+1}-x)}{4x^2+1-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x(\sqrt{4x^2+1}-x)}{3x^2+1}$

$=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x.(|2x|-x)}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2}{3x^2}=3$

10) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+2x-1}{2x^4+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5}{2x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{2}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+2x-1}{2x^n+5}=0^+$ si n est pair et > 5

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+2x-1}{-\frac{18}{5}x^5+5}=\frac{5}{6}$

Réponses des exercices de la seconde série

Domaines :

1) R\{4}   2) R\{-3,3}   3) R\{2}   4) R\{-1,3/2}   5)R\{8}

6) [-1,3[U]3,+∞[7)]2,+ ∞[8) [1/3,3[U]3,+ ∞[9)]1,19/8]   10) R\{1}

11)]- ∞,1/3[12) R   13) R   14) R\{-1/9}   15)]- ∞,3[

16)]- ∞,3[U[21/4,+ ∞[17)]-1/5,+ ∞[18) R   19) R\ $\underset{k\in Z}{U}\{\pi + k4\pi\}$

20) R\ $\underset{k\in Z}{U}\{\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (2k+1)\pi\}$

Limites

$$1)\lim_{\substack{x\to 4\\<\\>}}\frac{3-x}{x-4} = "\frac{-1}{0}" = \pm\infty$$

$$2)\lim_{\substack{x\to -3\\<\\>}}\frac{x-3}{9-x^2} = "\frac{-6}{0}" = \pm\infty$$

$$3)\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x}{x^2-4x+4} = "\frac{8}{0}" = +\infty$$

$$4)\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{-2x^2+x+3} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(-2x+3)} = \frac{1}{5}$$

$$5)\lim_{x\to 8}\frac{-x^2+9x-8}{x^2-16x+64} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(-x+1)}{(x-8)^2} = \lim_{\substack{x\to 8\\<\\>}}\frac{-x+1}{x-8} = "\frac{-7}{0}" = \pm\infty$$

$$6)\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{1+x}-2} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{1+x}+2)}{x-3} = 24$$

$$7)\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\frac{6x-1}{\sqrt{x-2}} = "\frac{11}{0^+}" = +\infty$$

$$8)\lim_{\substack{x\to 3\\<\\>}}\frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{6x-2}} = "\frac{2\sqrt{3}}{0^\pm}" = \pm\infty$$

$$9)\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{19-8x}-\sqrt{x+10}} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1-x^2+1)(\sqrt{19-8x}+\sqrt{x+10})}{(19-8x-x-10)(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1})} = \lim_{x\to 1}\frac{x(\sqrt{19-8x})+\sqrt{x+10})}{9(\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-1})} = "\frac{2\sqrt{11}}{0^+}" = +\infty$$

$$10)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{1-x} = "\frac{8}{\mp\infty}" = 0^\mp$$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-12}{\sqrt{1-3x}} = "\dfrac{-12}{+\infty}" = 0^-$

12) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}} = "\dfrac{3}{+\infty}" = 0^+$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3x^5+1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^5 = \pm\infty$

14) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x-5}{9x+1} = "\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{8x}{9x} = \dfrac{8}{9}$

Modifier le terme « 8x » pour avoir

$1°\lim = +\infty$ $\qquad 1° -8x^2$

$2°\lim = 0^-$ $\qquad 2°\mathit{impossible}$ (rem : on pourrait remplacer « 8x » par « 8 »)

$3° AH \equiv y = \dfrac{7}{4}$ $\qquad 3° \dfrac{63x}{4}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{3-x}} = "\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} -2\sqrt{-x} = -\infty$

16) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{\dfrac{21-4x}{3-x}} = 2$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x^2}{\sqrt{5x+1}} = "\dfrac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{5x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{5x}}{5} = +\infty$

18) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+4}) = "\infty - \infty" = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3}{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+4})} = "\dfrac{-3}{+\infty}" = 0^-$

19) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ < \\ >}} \dfrac{2\cos x}{1-\sin\frac{x}{2}} = "\dfrac{-2}{0^+}" = -\infty$

20) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{3} \\ < \\ >}} \dfrac{5-2tg\frac{x}{2}}{\cos x - \frac{1}{2}} = "\dfrac{5-2\sqrt{3}/3}{0}" = "\dfrac{\mathit{nombre\ positif}}{0^\pm}" = \pm\infty$