ANALYSE : Fonctions exponentielles et logarithmes

Les exponentielles et logarithmes dans différents domaines

1) Intérêts composés

a) Si 300.000 euros de francs sont placés actuellement à intérêts composés, calcule le taux annuel pour que le capital disponible après 5 ans ait doublé.

b) Quelle somme faut-il placer à un taux annuel d'intérêts composés de 2,25 % pour obtenir 3.000 € dans 5 ans ?

c) Une première banque propose des intérêts composés au taux mensuel de 0,5 %. Une deuxième banque propose des intérêts composés au taux annuel de 6 %. Dans quelle banque allez-vous placer votre argent?

2) Radioactivité

La loi de décroissance de la radioactivité d'un corps en fonction du temps est donnée par

$$N = N_0 e^{-lt}$$

N_0 est le nombre d'atomes radioactifs présents à l'instant initial
N est le nombre d'atomes radioactifs présents à l'instant t
l est une constante positive, caractéristique du corps, appelée constante de désintégration

Applications:

- *datation au carbone 14*
- *durée de vie des carburants nucléaires*

***Remarque**: on appelle" période de désintégration" ou "demi-vie d'un élément radioactif", le temps nécessaire pour que la moitié des atomes radioactifs du corps se désintègrent.*

Exercices

a) Si la demi-vie du carbone 14 est de 5730 années, calcule la constante de désintégration de cette substance.

b) Calcule l'âge approximatif d'un fossile préhistorique qui a conservé 40% de radium 226 dont la constante de désintégration est de 1,36 .10^{-11} par an.

3) Bactéries

Aujourd'hui, lundi, une population de bactéries est de 4,23 10^5;lundi passé, elle était de 9,93 10^4. En supposant que cette population varie de façon exponentielle, calcule la population prévue mercredi de la semaine prochaine.

4) *pH* d'une solution

En chimie, la force d'une base ou d'un acide dissout dans l'eau se mesure à la quantité d'ions H^+ présents dans la solution. Plus il y a d'ions H^+, plus la solution est acide; moins il y en a, plus elle est basique.
Comme la concentration en ions H^+ dans une solution est un nombre infinitésimal (10^{-12} moles par litre), on mesure plutôt la force d'une base ou d'un acide en calculant son pH

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]} = -\log [H^+]$$ *où $[H^+]$ est la concentration en ions H^+*

a) Calcule le *pH* de l'eau pure sachant que sa concentration en ions H^+ est de 10^{-7} moles par litre.
b) Quelle est la concentration en ions H^+ du jus de citron sachant que son *pH* est de 2 ?
c) L'échelle du *pH* va de 0 à 14. L'eau, qui est neutre, a pour *pH* 7. Où se situent les acides et les bases sur l'échelle du *pH?*
d) Comment varie le *pH* lorsque la concentration en ions H^+ décuple?

5) Sismologie

La magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$ *où I_0 est une intensité de référence.*

a) Place sur l'échelle de Richter les séismes de San Fransisco (1906) : $I = 1{,}78 \,.\, 10^8.I_0$ et de Los Angeles (1971) : $I= 5{,}01.\ 10^6 I_0$

b) Quelle était l'intensité du séisme de Liège (1983) si M= 4,9?

c) L'énergie *E,* en joule, libérée au foyer d'un séisme est liée à la magnitude par la formule
$\log E = a + bM$ où *a* et *b* sont des constantes.

d) Détermine *a* et *b* sachant qu'un séisme de magnitude 8 met en jeu environ 30 000 fois plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5, lui-même libérant une énergie de 0,2. 10^{20} joules.

6) Astronomie

La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est définie à partir d'un éclat de référence E_0 par

$$M = \log_a\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

avec la convention suivante: la magnitude augmente de 5 lorsque l'éclat est divisé par 100.

a) Détermine la base des logarithmes utilisés.
b) Calcule la magnitude apparente des astres suivants:

Soleil: $E = 4{,}786.10^{10}.E_0$ Lune: $E = 1{,}2.10^5.E_0$

7) Echelle logarithmique

Si l'on veut représenter sur un même axe des valeurs qui varient intensément, on se heurte à des problèmes d'échelle.
Exemple:
Voici l'évolution de la population d'une commune entre 1830 et 1930 :

année	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930
population	2000	4000	9000	11800	24000	30800	57500	61000	70000	100000	120000

Si 1 cm repère 1000 habitants, il faudrait 120 cm pour représenter la population de 1930; par contre, si 1 cm repère 10000 habitants, on n'apercevrait guère une différence entre la population de 1830 et de 1840.

Pour palier à ce problème, on utilise une échelle logarithmique : on représente les nombres par leur logarithme en base 10. Ainsi les nombres 1, 10, 1000 sont repérés par 0, 1 et 3 unités.
C'est l'échelle logarithmique. (voir papier logarithmique)
Dès lors,

- les intervalles entre les graduations ne sont pas de même longueur,
- 0 et les nombres négatifs ne figurent pas sur cette graduation (cette dernière commence à 1),
- les intervalles de graduation entre 1 et 10 se répètent entre 10 et 100, entre 100 et 1000, ...
- une différence de longueur d'une unité entre les représentations de deux nombres signifie que le plus grand des deux vaut dix fois le plus petit.

Les échelles logarithmiques sont utilisées pour représenter des fonctions dont les valeurs varient intensément. Un repère dont l'axe des ordonnées est muni d'une échelle logarithmique et dont l'axe des abscisses est gradué de façon normale définit les coordonnées semi-logarithmiques. Du papier quadrillé au moyen d'un tel système existe dans le commerce.

Les coordonnées semi-logarithmiques se révèlent particulièrement utiles pour représenter les fonctions exponentielles. Toute fonction du type $y = ba^x$ se représente par une droite quand on travaille en coordonnées semi-logarithmiques et inversement.
En effet,

coordonnées cartésiennes: $y = b\,a^x$
=> coordonnées semi-logarithmiques : $Y = \log(b.a^x) = \log b + x.\log a$ ou $Y = Ax + B$ en posant : $\log a = A$ et $\log b = B$ ou $a = 10^A$ et $b = 10^B$
=> coordonnées cartésiennes: $y=10^B\,(10^A)^x$

Dès lors, si une fonction donnée empiriquement semble avoir l'allure d'une fonction exponentielle, on reportera les informations connues en coordonnées semi-logarithmiques et l'on verra tout de suite si les points tracés se disposent a peu près le long d'une droite.
Dans l'affirmative, la fonction empirique est approximativement représentée par une fonction exponentielle.
Pour trouver son équation, on utilise l'analyse de régression pour déterminer l'équation de la

droite ***Y* = *Ax* + *B*** en coordonnées semi-logarithmiques.
La fonction exponentielle est alors $\boldsymbol{y = b.a^x}$ *avec* $a = 10^A$ et $b = 10^B$

Application:
Si le nombre *N* de bactéries présentes dans un bouillon de culture après *x* heures est donné par le tableau suivant,

X	0	1	2	3	4	5	6
N	32	45	64	90	127	180	254

vérifie que la population s'accroît suivant une loi exponentielle et détermine son équation.

Solutions des applications sur les exponentielles et logarithmes

1)

a) $600.000=300.000*a^5$
$a = 1,15$
taux annuel = 15 %

b) $3.000=x*1,0225^5$
x = 2.684 €

c) $C_1=C_0\,(1,005)^{12} = C_0\ 1,0617$ après un an dans la première banque
$C_2=C_0.1,06$ après un an dans la seconde banque
La première banque est la plus avantageuse

2) a)

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-l\,5730}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -5730\,l$$

$$l = 0,00012$$

b)

$$0,40 N_0 = N_0 e^{-1,36.10^{-11}\,t}$$

$$\ln 0,40 = -1,36.10^{-11} t$$

$$t = 6,737.10^{10}$$

Le fossile a approximativement 67.10^9 années (67 milliards d'années)

3) $4,23.10^5=9,93.10^4a^7$
$a = 1,23$
$x = 4,23.10^5\ 1,23^9$
$x = 27,26\ .\ 10^5$
On aura approximativement 2millions726 mille bactéries

4)

a) pH (eau)=-log(10^{-7}) = 7

b)

$$2 = -\log x$$
$$x = 10^{-2}$$

Le jus de citron a une concentration en ions H^{+} de 10^{-2} moles/litre

c) pH acide < 7 et pH base >7

d) pH diminue de 1

5)

a) M(San Fransisco) = log ($1,78.10^{8}$) = 8 + log 1,78 = 8,25
M(Los Angeles) = log ($5,01.10^{6}$) = 6,7

b)

$$4{,}9 = \log \frac{I}{I_0}$$
$$10^{4,9} = \frac{I}{I_0}$$

c) Le séisme de Liège avait pour intensité 7,94 . 10^{4} I_0

d)

$$\begin{cases} \log 0{,}2.10^{20} = a + 5b \\ \log 30.000 * 0{,}2.10^{20} = a + 8b \Leftrightarrow \log 3.10^{4}.0{,}2.10^{20} = a + 8b \end{cases}$$
$$\begin{cases} 19 + \log 2 = a + 5b \\ 23 + \log 2 + \log 3 = a + 8b \end{cases}$$
$$4 + \log 3 = 3b \Leftrightarrow b = 1{,}49$$
$$a = 11{,}85$$

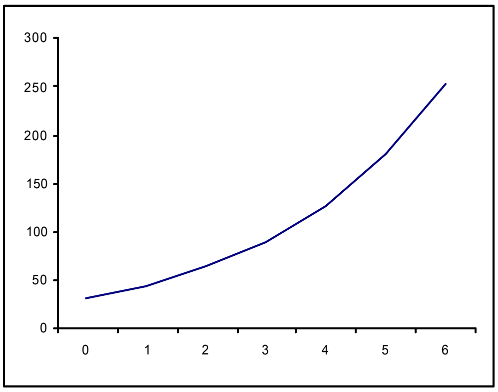
6) a)

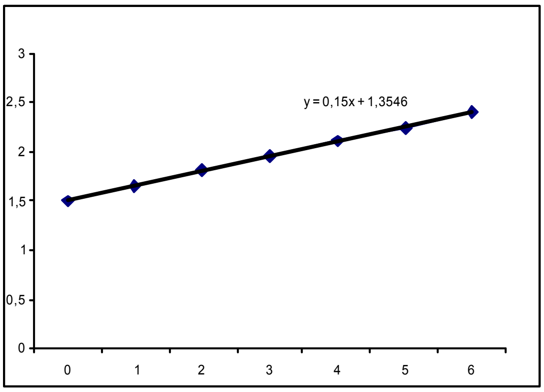
$$\log_a \frac{E}{100 E_0} = \log_a \frac{E}{E_0} - \log_a 100 = M + 5$$
$$\Rightarrow \log_a 100 = -5$$
$$a^{-5} = 100$$
$$a = 0{,}398$$

b) M(soleil) = $\log_{0,398}(4{,}786.10^{10})$ = -26,7
M(lune) = $\log_{,398}(1{,}2.10^{5})$ = -12,7

7)

x	N	Log N
0	32	1,50514998
1	45	1,65321251
2	64	1,80617997
3	90	1,95424251
4	127	2,10380372
5	180	2,25527251
6	254	2,40483372





d=Y = 0,15 X + 1,3546

A = 0,15 $\quad$ a = $10^{0,15}$ = 1,413
B = 1,3546 $\quad$ b= $10^{1,3546}$= 22,6

La fonction exponentielle est f(x) = $22,6.(1,413)^x$