Les aires de surfaces

Exercice N°3 page 31 du syllabus

Calcule l'aire délimitée par les graphiques de f(x) et g(x) :

F(x) = x² g(x) = -2x² + 3

h(x) = f(x) – g(x) = 3x² - 3

	-1		1	
+	0	-	0	+

bornes : a = -1 et b = 1

$$A = -\int_{-1}^{1} h(x)dx = \int_{1}^{-1} 3x^2 - 3\,dx = x^3 - 3x]_1^{-1} = (-1+3) - (1-3) = 4$$

h(x) étant une fonction paire, on aurait pu calculer l'aire entre les bornes 0 et 1 puis doubler cette aire.

F(x) = x g(x) = x² - 3x

h(x) = f(x) – g(x) = -x² + 4x

	0		4	
-	0	+	0	-

bornes : a = 0 et b = 4

$$A = \int_{0}^{4} h(x)dx = \int_{0}^{4} -x^2 + 4x\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2\Big]_0^4 = \left(-\frac{64}{3} + 32\right) - 0 = \frac{64}{3}$$

F(x) = 2x² g(x) = 6 – 4x²

h(x) = f(x) – g(x) = 6x² - 6

h(x) = f(x) – g(x) = 3x² - 3

	-1		1	
+	0	-	0	+

bornes : a = -1 et b = 1

h(x) étant une fonction paire, on calcule l'aire entre les bornes 0 et 1 puis on doubler cette aire

$$A' = -\int_{0}^{1} h(x)dx = \int_{1}^{0} 3x^2 - 3\,dx = x^3 - 3x]_1^0 = 2$$

Aire totale = 2 . 2 = 4

.

F(x) = x² g(x) = x³ + x² - 4x

h(x) = f(x) – g(x) = x³ + 4x = x (x² + 4)

h(x) admettant une seule racine, les graphiques de f(x) et g(x) sont tangents et ne définissent donc pas une aire.

F(x) = x³ -x² + 8x + 7 g(x) = 2x³ + x² - 5x + 17

h(x) = f(x) – g(x) = -x³ - 2x² + 13x – 10

Par Horner, on a (x – 1) (-x² - 3x + 10), ce qui donne le tableau de signes final :

	-5		1		2	
+	0	-	0	+	0	-

bornes : a = -5 et b = 1 puis a = 1 et b = 2

$$A = -\int_{-5}^{1} h(x)dx + \int_{1}^{2} h(x)dx = -\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 13\frac{x^2}{2} - 10x\Big]_{1;1}^{-5;2} = 238{,}833$$

F(x) = sin x g(x) = cos x sur la période [-π,π]

h(x) = f(x) – g(x) = sin x – cos x

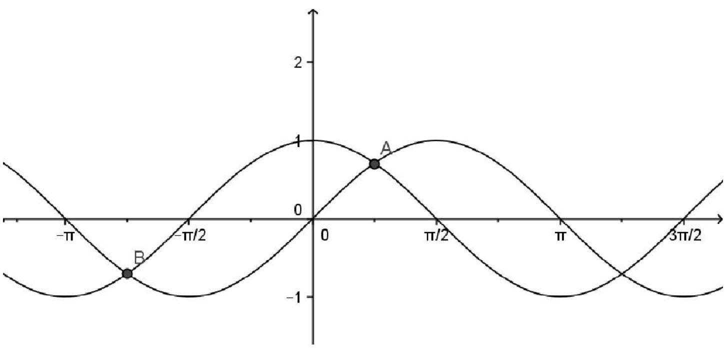
recherchons les points d'intersection entre f(x) et g(x):

sin x = cos x

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \;\; ou \;\; x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

bornes : a = $\frac{\pi}{4}$ et b = -–$\frac{3\pi}{4}$

$$A = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} cosx - sinx\, dx = sinx + cosx]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 2\sqrt{2}$$



F(x) =e^x g(x) = e^{-x}
h(x) = f(x) – g(x) = e^x – e^{-x}
recherchons les points d'intersection entre f(x) et g(x):
e^x = e^{-x}
x = -x
x = 0
h(x) admettant une seule racine, les graphiques de f(x) et g(x) sont tangents et ne définissent donc pas une aire

F(x) = tg x g(x) = sin 2x
h(x) = f(x) – g(x) = tg x – sin 2x
recherchons les points d'intersection entre f(x) et g(x):
tg x = sin 2x

$$\frac{sinx}{cosx} - sin2x = 0$$

$$\frac{sinx}{cosx} - 2sinx\ cosx = 0$$

$$sinx(1 - 2cos^2x) = 0$$

$$sinx(-\cos 2x) = 0$$

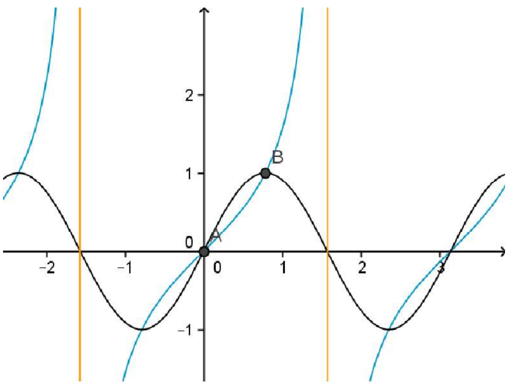
$$sinx = 0 \qquad x = k\pi$$

$$cos2x = 0 \leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi \leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Vu que f(x) et g(x) sont deux fonctions impaires, il suffit de considérer]-$\pi/2,0]$ ou $[0,\pi/2[$

tableau de signe de h(x) sur]-$\pi/2,0]$

	$-\pi/2$		$-\pi/4$		0
sin x	-1	-	-	-	0
- cos 2x	1	+	0	-	-1
h(x)	-1	-	0	+	0



$$A = -2\int_{-\pi/4}^{0} tgx - sin2x\ dx = -2\left\{-ln|cosx| + \frac{1}{2}cos2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\right\} = -2(0 + \frac{1}{2} - \left(-ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\right) = 0{,}31$$

$f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ $\qquad\qquad$ $g(x) = \dfrac{1}{2+x}$

$h(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{2x}{4-x^2}$

		-2		0		2	
h(x)	+	/	-	0	+	/	-

$$A = -\int_{-1}^{0} h(x)dx + \int_{0}^{1} h(x)dx = 2\int_{4}^{3}\frac{-1}{t}dt = -2\ ln|t|\Big]_{4}^{3} = 0{,}58$$

On pose $4 - x^2 = t$
on dérive $\quad -2x\ dx = dt$
bornes : si $x = \pm 1$ alors $t = 3$
si $x = 0$ alors $t = 4$