ALGEBRE : les systèmes

Niveau 5ème et 6ème (interprétation géométrique)

A) les systèmes numériques de 3 équations à 3 inconnues

Exercices du syllabus

Résoudre les systèmes suivants
en justifiant,
préciser s'il y a des solutions
si oui, définir l'ensemble de ces solutions (point, droite, plan)
donner la caractéristique du système (sol unique, impossible, simplement indéterminé, doublement indéterminé)

a) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ -3x + y - z = -8 \\ -x + 5y + z = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ -2x - 2y + 4z = 10 \\ -x - y + 2z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x - y + z = 8 \\ x - 5y - z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ x + 7y + 2z = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -x - y + 2z = -5 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + 3y - 6z = 8 \\ -x + 5y + z = -1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ x + 7y + 2z = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ -2x - 2y + 4z = -10 \\ x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$

j) $\begin{cases} -x - y + 2z = -5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ 3x + 3y - 6z = 25 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = -10 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + 2y - z = 10 \\ x + 7y + 3z = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \\ x - 5y - z = 1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ -3x - 3y + 6z = -15 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x + 2y - 4z = 10 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \\ x - 5y - z = 1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \end{cases}$

q) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 3x + 3y - 6z = 15 \\ x - 5y - z = 1 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x + y - 2z = 5 \\ 2x + 2y - 4z = 10 \\ -3x - 3y + 6z = -15 \end{cases}$

solutions :

a) solution unique ; un point (117/38,21/38,-26/38)
b) $\alpha \mid\mid \gamma$ pas de sol ; syst. impossible
c) solution unique ; un point
d) trois plans confondus ; syst doublement indéterminé ; solution : plan $\equiv$ x + y - 2z = 5

$$S = \left\{(x, y, \frac{x+y-5}{2}), \forall x, y \in R\right\}$$

e) α et β confondus ; syst simplement indéterminé ; solution : droite $\equiv \frac{3x-16}{8} = \frac{-3y-1}{2} = z$

$$S = \left\{(\frac{3x-16}{8}, \frac{-3y-1}{2}, z), \forall z \in R\right\}$$

f) trois plans confondus : voir d)
g) α // β : voir b)
h) α et β confondus : voir e)
i) idem
j) α et β confondus mais γ leur est parallèle ; pas de solution ; système impossible
k) α et γ confondus mais β leur est parallèle ; pas de solution ; système impossible
l) solution unique ; un point (102/35,1/7,-34/35) : voir a)

B) les systèmes numériques variés

a) 2x + 3y = 8
4x + 2y = 8
2x – 5y = -8

b) 2x + y = 4
3x + 3y = 3
x – y = 5

c) 3x + 2y = 6
12x + 8y = 24
9x + 6y = 18

d) 4x + 6y = 12
6x + 9y = 18
10x + 15y = 30

e) 3x + 2z = -1
7x + 2y + 2z = -1
x + 2y – 2z = -1
4x + 2y = 0

f) x – y + z – u = 0
2x + y – z – 2u = 0
x + y + z + u = 6
2x + y + z + 2u = 8

g) 11x + 6y + 4z = 4
-x + 3y + z = 5
3x + 4y + 2z = 6

h) x + y – z = 2
2x + y – 3z = 0
x – y – 3z = -6

i) 3x + 5y – 2z = 3
6x + 10y – 4z = 7
x – 3y + z = 8

j) 3x + 5y – 2z = 3
6x + 10y – 4z = 7
9x + 15y – 6z = 10

k) 4x + 5y – 2z – 8 = 0
x – y + 2z – 5 = 0
5x – 2y + z – 4 = 0

l) 11x + 6y + 4z = 4
-x + 3y + z = 5
3x + 4y + 2z = 6

m) x + y + z = 1
2x + 2y + 2z = 2
3x + 3y + 3z = 3

n) 4x + 5y – 2z = 8
x – y + 2z = 5
5x – 2y + z = 4

solutions :

a) solution unique S = {(1,2)}
b) solution unique S = {(3,8)}
c) système simplement indéterminé S = $\left\{\left(\lambda, \frac{6-3\lambda}{2}\right)\right\}$
d) système simplement indéterminé S = $\left\{\left(\lambda, \frac{6-3\lambda}{3}\right)\right\}$
e) système impossible
f) solution unique S={(1,2,2,1)}
g) système impossible
h) système simplement indéterminé S = $\left\{\left(\lambda, \frac{6-\lambda}{2}, \frac{\lambda+2}{2}\right)\right\}$
i) système impossible
j) système impossible
k) solution unique S = {(1,2,3)}
l) système impossible
m) système doublement indéterminé S = {(λ,μ,1-λ -μ)}
n) solution unique S = {(1,2,3)}

Interprétations dans le plan et dans l'espace (voir au cours)

a) 3 droites concourantes
b) 3 droites concourantes
c) 3 droites confondues d ≡ y = -1,5 x + 6
d) 3 droites confondues d ≡ y = -2/3x + 2
e) 3 plans sécants 2 à 2
f) 4 plans « concourants »
g) la droite d'intersection des 2 premiers plans est parallèle au 3ème plan
h) 3 plans passant par la droite d ≡ x = -2y + 6 = 2z – 2
i) les deux premiers plans sont parallèles
j) les trois plans sont parallèles
k) 3 plans sécants
l) la droite d'intersection des 2 premiers plans est parallèle au 3ème plan
m) trois plans confondus
n) trois plans sécants

C) les systèmes paramétriques

Exercices du syllabus

Discuter et résoudre les systèmes suivants :

1. $ax + y + z = a^2$
   $2ax + ay + 2z = 2a^2$
   $ax + y + az = 1$

2. $mx + y + z = 0$
   $x + my + z = 0$
   $x + y + mz = 0$

3. $mx + y - z = 1$
   $x + my - z = 1$
   $-x + y + mz = 1$

4. $mx + y + z = 1$
   $x + my + z = m$
   $x + y + mz = m^2$

5. $m^2x + y + z = m$
   $x + m^2y + z = 1$

6. $ax + y + z = 1$
   $x + ay + z = 1$
   $x + 2y + (a - 1)z = 1$
   $x + 2y + 2z = a - 2$

7. $ax + y + z = 1$
   $a^2x - ay + z = 2$
   $x - ay + az = 3a$

solutions :

1. si $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq 2$: solution unique $\{(\frac{a^2+a+1}{a},0,-a-1)\}$
   si a = 0 : système impossible
   si a = 1 : système simplement indéterminé $\{(\lambda,0,1-\lambda),\forall\lambda \in R\}$
   si a = 2 : système simplement indéterminé $\{(\lambda,7-2\lambda,-3)\},\forall\lambda \in R\}$

2. rem : Un système dont les termes indépendants sont tous nuls admet toujours au moins la solution (0,0,0) (appelée solution triviale). En effet, rang de M = rang de A

   si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, :solution unique (0,0,0)
   si m = 1 : système doublement indéterminé $\{(\lambda,\mu,-\lambda-\mu),\forall\lambda,\mu \in R\}$
   si m = -2 : système simplement indéterminé $\{(\lambda,\lambda,\lambda),\forall\lambda \in R\}$

3. si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ et $m \neq -1$: solution unique $\{(\frac{1}{m},\frac{1}{m},\frac{1}{m})\}$
   si m = 0 : système impossible
   si m = 1 : système simplement indéterminé $\{(\lambda,1,\lambda),\forall\lambda \in R\}$
   si m = -1 : système simplement indéterminé $\{(\lambda,\lambda,-1),\forall\lambda \in R\}$

4. si $m \neq -2$ et $m \neq 1$: solution unique $\{(\frac{-m-1}{m+2},\frac{1}{m+2},\frac{(m+1)^2}{m+2})\}$
   si m = -2 : système impossible
   si m = 1 : système doublement indéterminé $\{(\lambda,\mu,1-\lambda-\mu),\forall\lambda,\mu \in R\}$

5. si $a \neq 1$: solution unique $\{(\frac{2a^2}{(a-1)(-3a^2-2^2-1)},\frac{2a+1}{-3a^2-2a-1},\frac{-7a^3+2a^2+a+2}{(a-1)(-3a^2-2a-1)})\}$
   si a = 1 : système impossible

6. rem : système de 4 équations à 3 inconnues ; on considère d'abord un sous-système de 3 équations à 3 inconnues
   si a $\neq$ 1, 2, 3, -3 : système impossible
   si a = 1 : solution unique (3,-1,-1)
   si a = 2 : solution unique (2/3,2/3,-1)
   si a = 3 : solution unique (1/5,1/5,1/5)
   si a = -3 solution unique (-1,-1,-1)

7. rem : système de 2 équations à 3 inconnues d'où indétermination
   si m $\neq$ 1 et m $\neq$ -1 : système simplement indéterminé
   $\{(\lambda, \lambda - \frac{1}{m+1}, 1 - \lambda\frac{m^2+m+1}{m+1}), \forall\lambda \in R\}$
   si m = 1 : système doublement indéterminé $\{(\lambda, \mu, 1-\lambda-\mu), \forall\lambda, \mu \in R\}$
   si m = - 1 : système impossible

Exercices supplémentaires

8. ax + y + z = a
   ax + ay + z = 1
   x + ay + az = 1

9. ax + y = a – 1
   x + ay = 1 –a
   ax – ay = 2a

10. 3x + 2y = 12
    -x + y = 1
    -x + 2y = m

11. mx + y = 2
    x + y = 4
    x – y = m

12. x + y = 6
    (m + 2)x – 2y = m + 3
    mx – y = m

13. mx + my = 1
    mx + my = 2
    x – my = m

14. 5x + my = 1
    x + (m + 1) y = 8
    2x + (m + 1)y = 7

15. mx + y = -7
    (m + 2)x + 2y = -8
    x + y = m/2

solutions :

8) dtm A = $(a – 1)^2 (a + 1)$
   si a ≠ ±1 : solution unique S= {(1,-1,1)}
   si a = 1 , système doublement indéterminé S={(λ, μ, 1-λ-μ), $\forall\lambda, \mu \in R$}
   si a = -1 , système simplement indéterminé S = {(λ, -1, λ), $\forall\lambda \in R$}

9) Système à 3 équations et 2 inconnues
   si a = -1 système simplement indéterminé S = {(λ, λ-2), $\forall\lambda \in R$}
   si a ≠ -1 S = {(1,-1)}

10) Si m = 4, S = {(2,3)}
    si m ≠ -4 , système impossible

11) Si m = 0, S = {(2,2)}
si m = -3, S = {(1/2,7/2)}
si m ≠ 0 et -3, système impossible

12) Si m = 3/2, S = {(3,3)}
si m ≠ 3/2, système impossible

13) Système impossible $\forall m \in R$

14) Si m = 2, S = {(-1,3)}
si m ≠ 2, système impossible

15) Si m = 4, S = {(-3,5)}
si m = -4, S = {(1,-3)}
si m ≠ 4 et -4, système impossible