ALGEBRE : les matrices et déterminants

Prérequis : étudier toute la théorie relative aux matrices et aux déterminants ainsi que les méthodes de calculs.

ENONCES

Série N°1

1. Deux directeurs d'entreprise (Albert et Jean) désirent acheter des voitures de société selon les quantités suivantes :

	Ka	Fiesta	Focus
Albert	3	5	4
Jean	1	2	6

Ils s'adressent à deux concessionnaires de marque « Ford » pour obtenir des remises de prix. Voici les prix unitaires des modèles demandés chez les deux concessionnaires :

	Ka	Fiesta	Focus
1er magasin	9800	13125	15000
2ème magasin	9850	14100	14200

a) Ecrire la matrice quantité (matrice A)
b) Ecrire la matrice prix (matrice B)
c) Calculer la matrice donnant le prix total pour chaque directeur dans chacun des magasins
d) Quel est le concessionnaire le plus avantageux pour Albert ?

2. On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

a) Calculer dtm A. dtm B
b) Sans calculer et en justifiant, donner la valeur de dtm 3A

3. On donne $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x & -3y \\ -z^2 & 0.5t \end{pmatrix}$

Calculer x, y ,z ,t sachant que 3.A - I = B (I est la matrice identité)

4. Calculer par la méthode de Sarrus $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix}$

5. Calculer par la méthode des mineurs $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 7 \\ 6 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

6. Transformer le déterminant suivant pour amener deux zéros sur une même rangée (en notant les différentes transformations) et donner ensuite sa valeur
$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

7. Déterminer le rang de la matrice M
$$M = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Modifier <u>un</u> élément de M pour que le rang diminue d'une unité. Justifier.

8. Discuter le rang de la matrice en fonction du paramètre m
$$M = \begin{pmatrix} m & 12 & m \\ 3 & m & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

10. Calculer $\begin{vmatrix} \sin^2 a & -\cos b \\ \cos a & \sin a \sin b \end{vmatrix}$

Série N°2

1) On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   a) Calculer
      A + B ; A . B ; A . C ; B . C ; 2.C ; la transposée de C ; l'opposée de A

   b) Calculer dtm A par la règle des mineurs
      dtm B par la règle de Sarrus

   c) Sans calculer et en justifiant, donner la valeur de 3 dtm A
      dtm 3A

   d) Sachant que A est une matrice d'ordre 2 et que son dtm vaut a,
      donner en fonction de a :
      dtm 5A , 5 dtm A ; dtm (A/5) , dtm (-A) , dtm de la transposée de A

   e) Même question si A est d'ordre 3

2) Que devient la valeur du déterminant d'une matrice A d'ordre 3 si on multiplie tous les éléments de A par 2 puis qu'on divise les éléments d'une colonne par 3 et puis les éléments d'une ligne par 5

3) Transformer le déterminant suivant pour amener deux zéros sur une même rangée (en notant les différentes transformations) et donner ensuite sa valeur

   $$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

4) Modifier un élément du déterminant suivant pour que ce dernier soit nul (justifier)

   $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Calculer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

6) Inverser les matrices A et B de la question N°1

REPONSES

Série N°1

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9800 & 13125 & 15000 \\ 9850 & 14100 & 14200 \end{pmatrix}$

   $A.\tilde{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 155025 & 156850 \\ 126050 & 123250 \end{pmatrix}$

   Pour Albert, c'est le 1er magasin le plus avantageux (155025 €)

2. dtm A = 50
   dtm B n'existe pas car B n'est pas carré
   dtm 3A = 50.3^3

3. x = 14 ; y = -5 ; z = 3 ou -3 ; t = -8

4. 0 + 6 -112 + 20 – 0 – 7 = - 93

5. sur les mineurs de l_1 : 4 (-50-14) – 3 (30 – 42) -1 (6 + 30) = - 256

6. $c_1 \to c_1 - c_2$ $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ $l_3 \to l_3 + 2l_1$ $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 11 \end{vmatrix}$ = -1 . (33 – 14) = -19

7. dtm M = 24 d'où rang M = 3
   par exemple : $m_{33} = 5$

8. dtm M = m (m + 6) – 3 (12 + 2m) = m² - 36
   si $m \neq \pm 6$ alors rang M = 3
   si m = 6 ou si m = -6 alors rang M = 2

9. dtm M = - 32

   $\underline{M} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -8 \\ 15 & -6 & -8 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ $\tilde{\tilde{\underline{M}}} = \begin{pmatrix} -1 & 15 & 5 \\ -6 & -6 & -6 \\ -8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$ $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/32 & -15/32 & -5/32 \\ 6/32 & 6/32 & 6/32 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

10. sin³a sin b +cos a cos b

Série N°2

1)

a) A + B = $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 15 \\ 5 & 15 & -2 \end{pmatrix}$; A . B = $\begin{pmatrix} -15 & -23 & 54 \\ 66 & 52 & 18 \\ -12 & -2 & 57 \end{pmatrix}$; A . C = $\begin{pmatrix} -10 & 35 \\ 14 & 50 \\ -9 & 48 \end{pmatrix}$

B . C = $\begin{pmatrix} 11 & 41 \\ 18 & 27 \\ -5 & 86 \end{pmatrix}$; 2C = $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 16 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; transp de C = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$;

-A = $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$

b) dtm A = -3(28 + 4) – 6(7 + 10) = -198
dtm B = 63- 432 = - 369

c) 3 dtm A = 3 (-198) = -594
dtm 3A = 27 (-198) = -5346

d) dtm 5A = 25 a ; 5 dtm A = 5a ; dtm (A/5) = 1/25 a ; dtm (-A) = a ; dtm (transp A) = a

e) dtm 5A = 125 a ; 5 dtm A = 5a ; dtm (A/5) = 1/125 a ; dtm (-A) = -a ; dtm (transp A) = a

2) Le dtm est multiplié par 8/15

3) Par ex : c_1 devient $c_1 - c_2$ puis l_3 devient $l_3 + 2l_1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 14 & 21 \end{vmatrix} = -1.(63-14) = -49$$

4) Si a_{33} vaut 2, alors $c_3 = 2c_1$ et le dtm est nul (car deux rangées parallèles multiples)

5) Dtm A = 0 donc le rang est strictement inférieur à 3.
On peut extraire une sous-matrice d'ordre 2 dont le dtm est non nul
par ex : $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$
d'où la matrice A a un rang égal à 2

6) $A^{-1} = \dfrac{-1}{198}\begin{pmatrix} 42 & -21 & 36 \\ -12 & -6 & -18 \\ 32 & -17 & -18 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \dfrac{-1}{369}\begin{pmatrix} -72 & 26 & 9 \\ 63 & -33 & -54 \\ 0 & -41 & 0 \end{pmatrix}$