# ALGEBRE : Puissances et radicaux

Encore des exercices supplémentaires !

## ENONCES

1. **Rendre rationnel**

$$\frac{5}{3x^2\sqrt{5}-\sqrt{7}} \quad ; \quad \frac{7}{3x^4-2\sqrt{6}} \; ; \; \frac{1}{\sqrt[3]{4x}+7} \quad ; \quad \frac{2x}{3x-\sqrt[3]{5}}$$

2. **Résoudre les équations**

$x^2 = 14400$ ; $4x^2 - 15 = 0$ ; $5x^2 + 13 = 0$ ; $(2x - 1)^3 + 4\,(3x^2 - 1{,}5x + 7) = 0$

3. **Dans quel cas peut-on écrire :**

$(\sqrt{x^2+4})^2 = x^2+4$

$(\sqrt{x^2-4})^2 = x^2-4$

$(\sqrt{2x+1})^2 = 2x+1$

$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

$\sqrt{(x-2)^2} = x-2$

$\sqrt{(x-2)^2} = 2-x$

$\sqrt{(3x+1)^2} = -3x-1$

4. **Imposer les conditions d'existence puis rendre rationnel** $\dfrac{5}{5\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-3}}$

5. **Exprimer x en fonction de** $y : y = \dfrac{7x^4+1}{9}$ : $y = 8\sqrt[4]{3x^2+1}+5$

## SOLUTIONS

1. $$\frac{5}{3x^2\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{5(3x^2\sqrt{5}+\sqrt{7})}{45x^4-7}$$

$$\frac{7}{3x^4-2\sqrt{6}} = \frac{7(3x^4+2\sqrt{6})}{9x^8-24}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4x}+7} = \frac{\sqrt[3]{16x^2}-7\sqrt[3]{4x}+49}{4x+343}$$

$$\frac{2x}{3x-\sqrt[3]{5}} = \frac{9x^2+3\sqrt[3]{5}x+\sqrt[3]{25}}{27x^3-5}$$

2. x=± 120 ; $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$ ; impossible ; $x=\sqrt[3]{\frac{-27}{8}}=-\frac{3}{2}$

3. $x^2 + 4 \geq 0$ car sous une racine carrée MAIS $x^2 + 4$ sera toujours positif d'où $x \in R$
   puis le carré simplifie la racine ce qui donne l'égalité

   $x^2 - 4 \geq 0$ car sous une racine carrée
   puis le carré simplifie la racine ce qui donne l'égalité

   $2x + 1 \geq 0$ car sous une racine carrée
   puis le carré simplifie la racine ce qui donne l'égalité

   $(x – 2)^2 \geq 0$ car sous une racine carrée MAIS une parenthèse au carré sera toujours positive d'où $x \in R$
   puis la racine simplifie le carré ce qui donne l'égalité

   $(x – 2)^2 \geq 0$ car sous une racine carrée MAIS une parenthèse au carré sera toujours positive d'où $x \in R$
   puis la racine simplifie le carré ce qui donne $|x-2|$
   ensuite, pour obtenir l'égalité on enlève simplement la valeur absolue, ce qui ne peut se faire que si x – 2 est positif
   d'où la condition s'écrit $x – 2 \geq 0$

   $(x – 2)^2 \geq 0$ car sous une racine carrée MAIS une parenthèse au carré sera toujours positive d'où $x \in R$
   puis la racine simplifie le carré ce qui donne $|x-2|$
   ensuite, pour obtenir l'égalité on enlève la valeur absolue EN PRENANT L'OPPOSE, ce qui montre que x – 2 était négatif
   d'où la condition s'écrit $x – 2 \leq 0$

   $(3x + 1)^2 \geq 0$ car sous une racine carrée MAIS une parenthèse au carré sera toujours positive d'où $x \in R$
   puis la racine simplifie le carré ce qui donne $|3x+1|$
   ensuite, pour obtenir l'égalité on enlève la valeur absolue EN PRENANT L'OPPOSE, ce qui montre que 3x + 1 était négatif
   d'où la condition s'écrit $3x + 1 \leq 0$

4. Conditions d'existence :
   les radicands doivent être positifs
   le dénominateur doit être différent de 0

   d'où on a $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 5x-3 \geq 0 \\ 5\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-3} \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{5}{5\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-3}} = \frac{5(5\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x-3})}{25(3x+1)-(5x-3)} = \frac{5(5\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x-3})}{70x+28}$$

5. $x = \pm\sqrt[4]{\frac{3y-1}{7}}$ ; $x = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{y-5}{8}\right)^4 - 1}{3}}$