ALGEBRE : la division de polynôme

Solutions des exercices récapitulatifs

1. Effectue la division euclidienne : $(5x^4 - 2x^2 + 3x^3 + 1) : (3x - 2)$

$$q(x) = \frac{5}{3}x^3 + \frac{19}{9}x^2 + \frac{20}{27}x + \frac{40}{81}$$

$$\text{reste} = \frac{161}{81}$$

2. Calcule uniquement le reste $(5x^4 - 2x^2 + 3) : (x + 5)$

$$p(-5) = 5 \cdot (-5)^4 - 2 \cdot (-5)^2 + 3 = 3125 - 50 + 3 = 3078$$

3. Calcule la valeur de « a » pour que le reste soit -25

$$(5x^3 - 3ax + 2a - 9) : (x - 6)$$

$$p(6) = -25$$

$$5 \cdot 6^3 - 18a + 2a - 9 = -25$$

$$-16a = -1096$$

$$a = 137/2$$

4. Cherche le reste et le quotient $(-6x^5 + 3x^4 - x + 2) - (x - 1)$

$$\text{reste} = p(1) = -6 + 3 - 1 + 2 = -2$$

$$q(x) = -6x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 4$$

5. Effectue la division et écris le calcul sous forme de fraction

$$(2x^3 + x - 2) : (x + 3)$$

$$q(x) = 2x^2 - 6x + 19$$

$$\frac{2x^3 + x - 2}{x + 3} = 2x^2 - 6x + 19 - \frac{59}{x + 3}$$

6. Factorise $x^3 + 8x^2 + 23x + 16$

$$\text{div de } 16 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 16, -16\}$$

$$p(-1) = -1 + 8 - 23 + 16 = 0$$

$$p(x) \text{ est divisible par } (x + 1)$$

$$q(x) = x^2 + 7x + 16$$

$$x^3 + 8x^2 + 23x + 16 = (x + 1)(x^2 + 7x + 16)$$

7. Détermine a, b, c pour que $5x^3 + ax^2 + bx + c$ soit divisible par $(x - 1)$ et par $(x + 1)$ et que la division de ce polynôme par $(x - 2)$ donne 36 comme reste (fais la preuve)

$$p(1) = 0 \text{ d'où } 5 + a + b + c = 0 \quad (1)$$

$$p(-1) = 0 \text{ d'où } -5 + a - b + c = 0 \quad (2)$$

$$p(2) = 36 \text{ d'où } 40 + 4a + 2b + c = 36 \quad (3)$$

$$(1) - (2) : 10 + 2b = 0 \text{ d'où } b = -5$$

$$(1) \quad a + c = 0 \text{ d'où } c = -a$$

$$(3) \quad 40 + 4a + 2(-5) - a = 36 \quad \text{d'où } 3a = 6 \quad \text{d'où } a = 2$$

conclusion : $a = 2$; $b = -5$ et $c = 10$

8. Détermine a et b pour que la division de $2x^3 + ax^2 + bx - 3$ par $(x^2 - 1)$ ait un reste égal à $6x - 6$. (fais la preuve)

$$\begin{array}{r} 2x^3 + ax^2 + bx - 3 \\ -2x^3 \quad + 2x \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 - 1 \\ 2x + a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ax^2 + (b+2)x - 3 \\ ax^2 \quad + a \\ \hline \end{array}$$

$$(b+2)x + (a-3) \quad \text{ce qui donne le reste c'est-à-dire } 6x - 6$$

On a donc : $b + 2 = 6$ d'où $b = 4$

et $a - 3 = -6$ d'où $a = -3$

9. Utilise la méthode des diviseurs binômes (grille de Horner) pour chercher le reste et le quotient de $(8x^3 + 4x - 3) : (2x - 1)$ puis faire la preuve

$$\frac{8x^3 + 4x - 3}{2x - 1} = \frac{8x^3 + 4x - 3}{2(x - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \frac{8x^3 + 4x - 3}{x - \frac{1}{2}}$$

Il suffit de faire la grille de Horner avec $a = \frac{1}{2}$

on obtient $q(x) = 8x^2 + 4x + 6$ et $r = 0$

$$\text{On obtient donc : } \frac{8x^3 + 4x - 3}{2x - 1} = \frac{1}{2} (8x^2 + 4x + 6 + \frac{0}{2x - 1}) = 4x^2 + 2x + 3$$

10. Calcule par la méthode des coefficients indéterminés

$$(4x^3 - 2x^2 + 5x - 1) : (2x + 3)$$

le quotient sera un polynôme du second degré qui peut s'écrire

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

le reste = r

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 5x - 1}{2x + 3} = ax^2 + bx + c + \frac{r}{2x + 3}$$

ce qui donne

$$4x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = (ax^2 + bx + c)(2x + 3) + r$$

$$= 2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (3b + 2c)x + 3c + r$$

En égalant les coefficients, on peut écrire :

$$\begin{cases} 2a = 4 \\ 3a + 2b = -2 \\ 3b + 2c = 5 \\ 3c + r = -1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = \frac{17}{2} \\ r = -\frac{53}{2} \end{cases}$$

$$q(x) = 2x^2 - 4x + \frac{17}{2}$$

$$r = -\frac{53}{2}$$