ALGEBRE : les équations

Equations réductibles au deuxième degré

Notions à maîtriser :

factorisation (mise en évidence, produits remarquables, grille de Horner)
recherche des racines d'un polynôme du second degré par la méthode delta

Rappels :

Toute équation de degré > 1 doit se mettre sous la forme $p(x) = 0$
(c'est-à-dire placer tous les termes dans le membre de gauche pour avoir 0 dans le membre de droite)

Les équations incomplètes ne se résolvent pas par la méthode delta

Toute équation COMPLETE du second degré peut se résoudre par la méthode delta APRES AVOIR MIS L'EQUATION SOUS LA FORME $ax^2 + bx + c = 0$

Si l'équation est de degré > 2, il faut factoriser le membre de gauche puis utiliser la règle du produit nul

Exercices préparatoires sur les équations par mise en évidence

Soit $(a - b)^n$

Si « n » est pair, je peux remplacer $(a - b)^n$ par ....

<u>Exemples</u> : $(x - 10)^8$ devient ....

$(6 - 3x)^4$ devient ....

$(-9 - 5x)^6$ devient ....

$(7x + 3)^{10}$ devient ....

Si « n » est impair, je peux remplacer $(a - b)^n$ par ....

<u>Exemples</u> : $(x - 10)^9$ devient ....

$(6 - 3x)^3$ devient ....

$(-9 - 5x)^7$ devient ....

$(7x + 3)^{11}$ devient ....

Par contre, $(a - b)$ et $(a + b)$ ne peuvent pas « s'interchanger »

Résous les équations suivantes :

$(x-5)^6 (3-x)^3 (5x-1) + (5-x)^5 (x-3)^4 (5x-1) = 0$ S = {5 , 3 , 1/5 , 4}

$(2x+5)^2 (2-x)^4 - x(-2x+5)(x-2)^4 = 0$ S = {2}

$(3x-1)^5 (-2x+1)^3 + (1-3x)^4 (2x-1)^5 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}\right\}$

Exercices variés

1) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ S = {1/2}

2) $2x^2 - 2x = -5$ S = {}

3) $x^3 - 3x^2 - 10x = 0$ S = {-2 ;0,5}

4) $(x-1)^2 + x^2 = x$ S = {1/2,1}

5) $(x-1)(x^2+x-2) - (1-x)(7x+14) = 0$ S = {-6,-2,1}

6) $x(8-x)^5 (x-1) + 47(x-8)^3 (1-x) = 0$ S = {1,8}

7) $(2x-5)^2 - 25 = 0$ S = {5,0}

8) $(x+1)^3 + 8 = 0$ S = {-3}

9) $(x-1)^6 (3-x)^2 - 8(1-x)^3 (x-3)^2 = 0$ S = {1,3,-1}

10) $7x^5 - 2x^3 - 7x^2 + 2 = 0$ $S = \{1, \pm\sqrt{\frac{2}{7}}\}$

11) $8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x = 0$ S = {-1/2}

12) $(5-x)^2 + x^2 = -9x + 28$ S = {-1,3/2}

13) $4x^2 - 5x + 7 = 0$ S = {}

14) $(2x+1)(x-4) + (x-1)(x-2) + 11 = -x^2 - 22x$ S = {-3/2}

15) $(5x+4)(6x-3)-(x-1)(x-2) = -(7x^2-35x+11)$ S = {-1/9 ;3/4}

Equations avec conditions d'existence (C.E.)

Rappels sur la méthode :

Factoriser les dénominateurs
Imposer les conditions d'existence
Réduire au même dénominateur et l'enlever (attention aux signes !)
Ramener l'équation à la forme $ax^2 + bx + c = 0$
Résoudre l'équation finale
Vérifier si les solutions trouvées conviennent (cf C.E.)

Exercices :

$$1)\ \frac{x+1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2}=1$$
$$2)\ \frac{7x-4}{x-3}+\frac{6x-1}{3-x}=\frac{x+1}{x-1}$$
$$3)\ \frac{8x-1}{3x+2}-\frac{7x-2}{x+3}=\frac{1}{3x^2+11x+6}$$
$$4)\ \frac{x+1}{4-x^2}-\frac{3}{2x^2-3x-2}=\frac{5}{2x+1}$$
$$5)\ \frac{8x-1}{9x^2+12x+4}-\frac{5x}{3x+2}=1$$

Solutions

1. $\frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{2}{x^2}=1$
   C.E. $x \neq -1$ et $x \neq 0$
   équation finale : $x^2 + 3x + 2 = 0$
   S = {-2}
   Remarque : Si on simplifie (x+1) dans le premier terme de l'énoncé, l'équation s'écrit : $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=1$
   et donne comme équation finale: $-x^2 + x + 2 = 0$ S = {-2}

2. $\frac{7x-4}{x-3}-\frac{6x-1}{x-3}=\frac{x+1}{x-1}$
   C.E. $x \neq 3$ et $x \neq 1$
   équation finale : $-2x +6 = 0$
   S = { }

3. $\frac{8x-1}{3x+2}-\frac{7x-2}{x+3}=\frac{1}{(3x+2)(x+3)}$
   C.E. $x \neq -2/3$ et $x \neq -3$
   équation finale : $-13x^2 +15x = 0$

S = {0,15/13}

4. $$\frac{x+1}{(2-x)(2+x)}-\frac{3}{(2x+1)(x-2)}=\frac{5}{2x+1}$$
$$\frac{x+1}{(2-x)(2+x)}+\frac{3}{(2x+1)(2-x)}=\frac{5}{2x+1}$$

C.E. $x \neq -2$ et $x \neq -1/2$ et $x \neq 2$
équation finale : $7x^2 + 6x -13 = 0$
S = {1, -13/7}

5. $$\frac{8x-1}{(3x+2)^2}-\frac{5x}{3x+2}=1$$
C.E. $x \neq -2/3$
équation finale : $- 24x^2 - 14x - 5 = 0$
S = { }

Exercices variés

1. $(x-1)^2 + x^2 = x$
   S = {1/2 ; 1}

2. $8x^2 - 5x + 1 = 0$
   S = { }

3. $(5x + 4)(6x - 3) - (x - 1) (x - 2) = - (7x^2 + 2x + 11)$
   S = {0,1536 ; -0,542}

4. Calculer m pour que $x^2 + 5x + m = 0$ admette une seule solution.
   Réponse : m = 25/4

5. Calculer k pour que ¾ soit solution de l'équation $4x^3 - 3x^2 - kx - k - 1 = 0$
   Ecrire l'équation correspondante et la résoudre.
   Réponse : k = -4/7 ; équation : $4x^3 - 3x^2 + 4/7\, x - 3/7 = 0$; S = {3/4}

Exercices récapitulatifs

Notions à maîtriser : **factorisation**
méthode delta (formules, différents cas …)
formules somme-produit

1) **Résoudre** (avec conditions d'existence)

$$2x^2+9x=5$$

$$\frac{x+1}{3x}-\frac{5x+7}{8x-1}=9$$

$$\frac{2(x-1)}{x-3}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-24}{x^2-9}$$

$$\frac{5(x+1)}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{3x+2}{x^2-4}$$

$$\frac{3x+1}{x-3}-\frac{x}{x-1}=\frac{x^2+2x-1}{x^2-4x+3}$$

$$\frac{2x-3}{x+3}-\frac{x}{x+1}=\frac{6-4x}{x^2+4x+3}$$

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+3}{2x-5}=\frac{-2x^2+18x-7}{-2x^2+7x-5}$$

2) **Trouver k** pour que l'équation admette 2 comme solution
$-x^2-x+2k^2=0$

3) **Donner une condition sur k pour que l'équation admette deux solutions distinctes** $3kx^2 - 5x + 9 = 0$

4) **Simplifier** $\dfrac{x^2-4x+4}{3x^2-5x-2}$

5) **Soit l'équation** $5x^2 - 36x + 6k = 0$
Trouver la valeur de k pour que le produit des racines soit 2.

6) **Quelle valeur faut-il donner à m** pour que l'équation suivante admette une racine double
$(m + 1) x^2 - (m + 3) x + (m - 2) = 0$

7) **Combien aura-t-on de solutions si m > 1/4 dans l'équation**
$mx^2 + 3x + 9 = 0$

Solutions

Rappels :
Pour résoudre une équation du second degré, il faut la ramener à la forme $ax^2 + bx + c = 0$
Ne pas oublier de factoriser les dénominateurs
Imposer les conditions d'existence
Vérifier si les solutions trouvées conviennent

1)
a) S = {-5,1/2}

b) C.E. $x \neq 0$ et $x \neq 1/8$
équation finale : $-223x^2 + 13x - 1 = 0$ S = { }

c) C.E. $x \neq -3$ et $x \neq 3$
équation finale : $x^2 + 8x + 12 = 0$ S = {-6, -2}

d) C.E. $x \neq -2$ et $x \neq 2$
équation finale : $4x^2 + 13x + 10 = 0$ S = {-5/4}

e) Factorisation de $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$
C.E. $x \neq 1$ et $x \neq 3$
équation finale : $x^2 - x = 0$ ou $x(x - 1) = 0$ S = {0}

f) Factorisation de $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$
C.E. $x \neq -3$ et $x \neq -1$
équation finale : $x^2 - 9 = 0$ ou $(x - 3)(x + 3) = 0$
S = {3}

g) Factorisation de $-2x^2 + 7x - 5 = (1 - x)(2x - 5) = -(x - 1)(2x - 5)$!
C.E. $x \neq 1$ et $x \neq 5/2$
équation finale : $x^2 + 8x - 9 = 0$
S = {-9}

2) 2 est solution donc vérifie l'équation d'où en remplaçant x par 2, on a :
$-2^2 - 2 + 2k^2 = 0$
il suffit de résoudre cette équation pour obtenir la valeur de k
$2k^2 = 6$
$k = \pm\sqrt{3}$

3) L'équation admet 2 solutions distinctes ssi delta > 0
Calculons delta = 25 – 108 k
il suffit de résoudre l'inéquation 25 – 108 k > 0 ce qui donne $k < 25/108$

4) Pour pouvoir simplifier, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur :
$$\frac{(x-2)^2}{(x-2)(3x+1)} = \frac{x-2}{3x+1}$$
rem : C.E. $x \neq 2$ et $x \neq -1/3$

5) Le produit des racines est donné par $\frac{c}{a} = \frac{6k}{5}$ d'où $\frac{6k}{5} = 2$ d'où $k = \frac{5}{3}$
Dans ce cas, l'équation devient $5x^2 - 36x + 15 = 0$ et admet 2 solutions

puisque delta = 996 > 0

6) On dit qu'une équation du second degré admet une racine double lorsqu'elle admet une seule solution c'est-à-dire lorsque delta = 0
Calculons delta = $(-(m + 3))^2 - 4 (m + 1)(m – 2) = -2m^2 + 10m + 13$
Résolvons l'équation $-3m^2 + 10m + 17 = 0$, ce qui donne

$$m = \frac{-10 \pm \sqrt{304}}{-6} = \frac{5 \pm \sqrt{76}}{3}$$

7) Le nombre de solutions est donné par le signe de delta
Calculons delta = 9 – 36m
Etablissons un tableau de signes de delta

m		¼	
	+	0	-

Si m > ¼, delta < 0 donc pas de solution.